

**1^{er} Coloquio del Departamento
de Matemáticas**

**El método Monte-Carlo y su aplicación a
finanzas**

Patricia Saavedra Barrera
Víctor Hugo Ibarra Mercado



El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas

Patricia Saavedra Barrera
Víctor Hugo Ibarra Mercado

Departamento de Matemáticas, UAM-I



Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Introducción	vii
Capítulo 1. Valuación de opciones por Monte-Carlo	1
1. Introducción a las opciones	1
2. Modelación matemática de las opciones	4
3. Valuación de una opción europea	6
4. El método Monte-Carlo	8
5. Valuación de opciones asiáticas	13
6. Esquemas numéricos	16
7. Resultados de la simulación Monte Carlo	18
8. Métodos de reducción de varianza: variable de control	19
9. Resultados numéricos con reducción de varianza	22
Capítulo 2. Cálculo de la cobertura	25
1. Cálculo de la cobertura para opciones europeas vainilla	25
2. Cálculo de la cobertura por Monte-Carlo	27
3. Cálculo de algunas griegas por Monte-Carlo	35
Apéndice A. Simulación	39
1. Generadores de números aleatorios	39
2. Pruebas para validar generadores de números aleatorios	41
3. Generación de observaciones de variables aleatorias	43
4. Simulación de una caminata aleatoria	44
Apéndice B. Integración numérica por Monte-Carlo	49
1. Integración numérica	49
2. Integración múltiple	52
3. Integración numérica por Cuasi Monte-Carlo	56
Bibliografía	63

Introducción

La valuación y cobertura de las opciones es un tema que en los últimos veinte años ha adquirido una gran importancia. Las opciones vainilla tipo call se comenzaron a negociar en forma sistemática desde 1973 en el mercado de futuros de Chicago, las opciones put a partir de 1977 y las exóticas en 1982. A principios de los años noventa el mercado de opciones se estimaba en cuatro billones de dólares, ver [9].

El problema de la valuación puede ser analizado tanto desde un marco probabilístico como desde el punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales. Desde el probabilístico, valorar una opción se reduce al cálculo de una esperanza de una función continua aplicada a un proceso estocástico, mientras que determinar la cobertura implica el cálculo de la derivada de dicha esperanza. Para buena parte de las opciones la valuación y el cálculo de la cobertura no pueden hacerse en forma exacta, hay que aproximarlas por medio de métodos numéricos. Entre ellos, el más popular es el método de Monte-Carlo que consiste en aproximar la esperanza por medio de la media de una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Estas notas tienen como objetivo introducir al lector a la valuación y cálculo de la cobertura tanto desde el punto de vista teórico como numérico. El énfasis está puesto en la parte numérica, presentando aspectos que son de interés para las aplicaciones, en particular en lo que concierne a la precisión y la rapidez de los métodos. El material es autocontenido en lo que se refiere a la parte numérica. Se presupone que el lector tiene conocimientos de probabilidad, en particular de procesos estocásticos continuos, y de estadística elemental. Se incluyen algoritmos que podrán ser programados fácilmente en cualquier lenguaje de programación.

El primer capítulo se dedica a la valuación de opciones europeas y asiáticas, estas últimas como ejemplo de la valuación de opciones exóticas. En la última sección de este capítulo, se incluye un ejemplo de un método de reducción de varianza cuyo objetivo es reducir el tiempo de cálculo del método Monte-Carlo. El segundo capítulo trata el problema de la cobertura; se presentan dos métodos de cómo valorarla

numéricamente. En los anexos se incluye un capítulo sobre la generación de variables aleatorias en computadora y la aproximación numérica de algunas ecuaciones diferenciales estocásticas y otro sobre Monte-Carlo como método de integración numérica.

Parte del material de esta obra se utilizó durante el primer Coloquio del Departamento de Matemáticas de la UAMI, realizado en enero del 2008 en la Trinidad, Tlaxcala, para impartir uno de los talleres que formaron parte del evento. Este coloquio se pudo llevar a cabo gracias al apoyo del Programa Integral de Fortalecimiento Institucional 3.3 (PIFI).

Valuación de opciones por Monte-Carlo

1. Introducción a las opciones

Los derivados son instrumentos financieros cuyo rendimiento depende de otro bien o activo. Por ejemplo, el valor de un bono depende de las tasas de interés y el de un petrobono del precio del petróleo. Otros derivados son los futuros, los forwards, los warrants y las opciones, entre otros.

Una opción europea es un contrato entre dos partes para adquirir o vender un bien o un activo llamado subyacente a un precio y en una fecha fijados de antemano. A la fecha se le llama fecha de maduración y se denotará por T y al precio se le conoce como precio de ejercicio que se denotará por K . Si la opción es de compra se llama un call, si es de venta se llama un put. Las principales características de una opción son:

1. En una opción siempre hay dos partes: por un lado, quien compra la opción y por otro quien la suscribe.
2. El primero adquiere el derecho, pero no la obligación, de ejercer la opción en la fecha de maduración.
3. En cambio, la contra-parte se obliga a cumplir el contrato, independientemente de lo que convenga a sus intereses.
4. Para compensar esta asimetría y que el contrato sea justo para ambas partes, quien compra la opción le paga a quien la suscribe una prima que le permita cubrirse contra futuras pérdidas, debidas al cambio de precio del subyacente durante la vigencia de la opción.

Una opción puede negociarse en el mercado secundario por lo que es importante determinar su valor V_t para cada tiempo $t \in [0, T]$. En particular, la prima que se paga al adquirir la opción es igual al valor de la opción en el tiempo de la firma del contrato, consideremos que éste es el tiempo $t = 0$.

Denotemos con S_t el valor del subyacente al tiempo t . La ganancia que obtiene quien adquiere la opción se llama función de pago o pay-off y claramente depende del valor del subyacente. Denotemos a esta función como H . Para una opción call europea, la ganancia va a ser cero, si no

se ejerce la opción, y va a ser igual a la diferencia entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio, en caso de que se ejerza. Por lo que $H : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, con regla de correspondencia igual a

$$H(S) = \text{máx}\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+$$

si la opción es un call e igual a

$$H(S) = \text{máx}\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)_+$$

para un put.

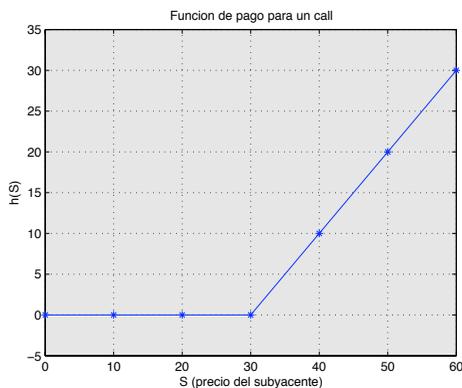


Figure 1.1. Función de pago del call.

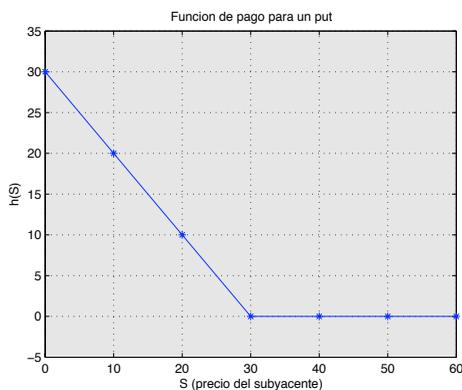


Figure 1.2. Función de pago del put.

Hay una gran variedad de opciones en el mercado y éstas se clasifican según su función de pago y la forma en que pueden ejercerse. Las opciones

que tienen como función de pago a H , la función antes definida, se llaman opciones vainilla. Hay otras opciones llamadas exóticas cuya función de pago depende de la trayectoria que siga el precio del subyacente. Por ejemplo, entre las exóticas está la opción asiática cuya función de pago depende del promedio del subyacente a lo largo del tiempo de maduración.

O sea para un call se tiene que

$$H(S) = \max \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S(x) dx - K, 0 \right\}.$$

Otras opciones se distinguen por la forma en que se ejercen. Ya vimos que las europeas se ejercen únicamente en el tiempo de maduración. Las americanas pueden ejercerse en cualquier tiempo $t \in [0, T]$, mientras que la opción Bermuda sólo tiene un número finito de tiempos de ejercicio. El problema matemático a resolver para estas opciones es un poco distinto al de las europeas, pues al mismo tiempo que se valúan hay que determinar el momento óptimo de ejercerlas.

Por último, para todas las opciones debe determinarse también la estrategia óptima de inversión de la prima que debe seguir quien suscribe la opción, para que a la fecha de vencimiento su inversión sea igual al valor de la opción al tiempo T . A este problema se le conoce como el problema de la cobertura y es tan importante como el de la valuación.

Marco teórico. En el mercado financiero hay participantes a quienes se denominan agentes financieros que compran y venden activos financieros. Los activos financieros se clasifican en activos financieros de renta fija, cuyos rendimientos son deterministas, y activos financieros de renta variable, acciones y bienes de consumo cuyos rendimientos tienen incertidumbre.

El modelo de mercado con el que se trabajará tiene las siguientes reglas:

1. Las transacciones financieras se pueden llevar a cabo para cualquier tiempo $t \in [0, T]$.
2. Se trabaja en un mercado ideal en el que los bancos prestan y dan créditos a la misma tasa de interés.
3. Principio de no arbitraje o ausencia de oportunidad de arbitraje: no se puede tener un portafolio de inversión π cuyo precio inicial π_0 sea cero, pero cuyo precio $\pi_T \geq 0$ y su valor esperado estrictamente mayor que cero; o sea que sin invertir un centavo se tenga una posibilidad de hacer una ganancia positiva.
4. Para simplificar el modelo se asume que se pueden comprar fracciones de activos.

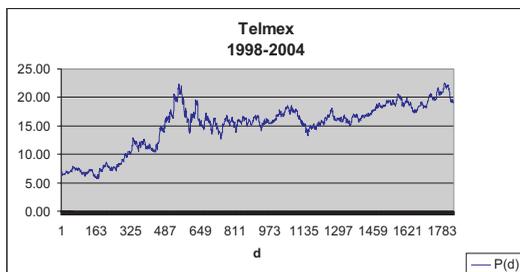


Figure 1.3. Precio diario de la acción de Telmex.

5. Por realismo se permiten compras en corto; es decir, que se puede pedir prestado para comprar acciones. En este caso, para distinguir el dinero prestado del propio, a las cantidades prestadas que se inviertan se denotan con signo negativo.
6. No hay pago de dividendos ni costos de transacción.

2. Modelación matemática de las opciones

1. Se tiene un espacio de probabilidad (Ω, F, P) .
2. Se tiene un movimiento browniano W_t definido en este espacio de probabilidad.
3. Se tiene una filtración \mathcal{F}_t generada por el movimiento browniano W_t .
4. El mercado se compone de dos activos: uno libre de riesgo y otro con riesgo. El precio de un peso al tiempo t invertido a la tasa libre de riesgo $r > 0$ se denotará por $S_t^0 = e^{-rt}$. El precio del activo con riesgo o subyacente al tiempo t se denotará por S_t . S_t es un proceso estocástico continuo en el intervalo $[0, T]$ que satisface la siguiente ecuación

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad S_0 = S_0^*, \quad (1.1)$$

en donde μ es la tendencia y $\sigma > 0$ la volatilidad del subyacente. Esta ecuación tiene como solución exacta a

$$S_t = S_0^* e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

Observaciones:

1. El browniano es el límite de una caminata aleatoria cuando hacemos tender Δt a cero. Satisface que $W_0 = 0$ y que los incrementos $W_t - W_s$ son independientes y se distribuyen como una normal con media cero y varianza $t - s$ para $s \leq t$.

2. La tendencia y la volatilidad dependen del subyacente y pueden ser estimadas a partir de datos históricos a través de la media y la desviación estándar muestral:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ln \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \right),$$

y

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \left(\ln \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \right) - \hat{\mu} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Portafolios de inversión. En este mercado, un portafolio consiste en un capital invertido en los activos antes mencionados. El monto invertido en el activo sin riesgo al tiempo t se denota por ϕ_t^0 y por ϕ_t el número de acciones que se adquieren del subyacente. A la pareja $\{\phi_t^0, \phi_t\}$ se le conoce como estrategia de inversión y se supone que son variables aleatorias \mathcal{F}_t medibles.

Recordemos que para cada $t > 0$, ϕ_t^0 y ϕ_t toman valores en los reales. El valor del portafolio al tiempo t se denota por π_t y es igual a

$$\pi_t = \phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t. \quad (1.3)$$

Portafolios autofinanciables. Supongamos que el portafolio es autofinanciable; es decir, después del tiempo inicial no se mete ni se saca dinero del portafolio hasta el tiempo T . Los cambios en el valor del portafolio dependen únicamente del cambio en la composición del mismo y en los cambios en el precio del subyacente.

Esto se expresa matemáticamente por

$$d\pi_t = r\phi_t^0 e^{rt} dt + \phi_t dS_t. \quad (1.4)$$

Probabilidad neutra al riesgo. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una medida de probabilidad P^* se dice que es neutra al riesgo si

1. P y P^* son probabilidades equivalentes; es decir, P es absolutamente continua respecto a P^* y P^* es absolutamente continua respecto a P .
2. Bajo P^* los precios descontados $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ son martingala:

$$E^*(\tilde{S}_{t+s} | \mathcal{F}_t) = \tilde{S}_t, \quad s > 0.$$

TEOREMA 2.1. (Teorema de Girsanov) Sea W_t , $0 \leq t \leq T$, un movimiento browniano en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y sea \mathcal{F}_t una filtración generada por W_t . Sea λ_t , para $0 \leq t \leq T$, un proceso adaptable, es decir λ_t es \mathcal{F}_t medible, y defina

$$Z_t = e^{-\int_0^t \lambda dW_s - \int_0^t \lambda^2 dt},$$

y a

$$B_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

y suponga que $E(\int_0^T \lambda_t^2 Z_t^2 dt) < \infty$. Entonces $E(Z_T) = 1$ y bajo la probabilidad P^* dada por

$$\frac{dP_t^*}{dP_t} = Z_t = e^{-\int_0^t \lambda dW_s - \int_0^t \lambda^2 dt},$$

el proceso B_t es un movimiento browniano.

En nuestro modelo de mercado si se selecciona a $\lambda_t = \frac{(\mu-r)}{\sigma}$, entonces se cumplen las hipótesis del teorema de Girsanov lo que nos permite garantizar la existencia de la probabilidad neutra al riesgo bajo la cual los precios descontados del activo con riesgo son martingala.

Dos resultados fundamentales. Una estrategia de inversión es admisible si es autofinanciable y el valor descontado del portafolio $\tilde{\pi}_t$ es de cuadrado integrable bajo la probabilidad neutra al riesgo y positivo para toda $t > 0$.

Se dice que una opción es replicable o simulable si se puede construir un portafolio autofinanciable y admisible π_t cuyo valor en cualquier tiempo $t \in [0, T]$ coincida con el de la opción. Es decir

$$V_t = \pi_t. \tag{1.5}$$

Definición

Un modelo de mercado es completo si cualquier reclamo contingente puede ser replicado por un portafolio de inversión autofinanciable.

TEOREMA 2.2. *(Primer teorema fundamental de la valuación de activos) Si un modelo de mercado tiene una medida de probabilidad neutra al riesgo entonces en el modelo hay ausencia de oportunidad de arbitraje.*

TEOREMA 2.3. *(Segundo teorema fundamental de la valuación de activos) Si un mercado tiene una probabilidad neutra al riesgo entonces el modelo es completo si y solo si ésta es única.*

La demostración del Teorema de Girsanov y de estos dos teoremas se puede ver en [22].

3. Valuación de una opción europea

Supóngase que se tiene una opción put con duración de 6 meses sobre una acción de Telmex con precio actual $S_0 = 50$, cuya volatilidad es igual a 12% anual, el precio de ejercicio es $K = 52$ y la tasa de interés libre de riesgo igual al 6% anual. ¿Cuál debe ser el valor de la prima del put para que la opción sea un contrato justo para ambas partes?

Por el teorema de Girsanov se puede asegurar que existe una única probabilidad P^* , equivalente a P , llamada probabilidad neutra al riesgo, para la cual el precio del subyacente es de la forma

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right),$$

con B_t , $t \in T$, un movimiento browniano dado por

$$B_t = W_t + \frac{(\mu - r)}{\sigma} t.$$

Bajo la probabilidad P^* , $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{e^{rt}}$ es una martingala. Es decir,

$$E^*(\tilde{S}_{t+s} | \mathcal{F}_t) = \tilde{S}_t.$$

La unicidad de la probabilidad neutra al riesgo implica que el mercado es completo, lo que quiere decir, en el caso de las opciones, que para cualquier opción europea con fecha de vencimiento T y con valor $V_T = h(S_T)$ se puede construir un portafolio autofinanciable π_t cuyo valor en cualquier tiempo $t \in [0, T]$ coincida con el de la opción.

El valor descontado del portafolio π_t es martingala dado que los precios descontados son martingala, por lo que también \tilde{V}_t es una martingala, lo que implica que

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)} H(S_T) | \mathcal{F}_t),$$

con $H(S_T)$ la función de pago de la opción.

Al aplicar estos resultados al caso de una opción europea vainilla V_t se tiene que

$$V_t = F(t, x) = E^*(e^{-r(T-t)} H(x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(B_T-B_t)}) | \mathcal{F}_t).$$

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)} H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y \sqrt{T-t}})) \quad \text{con } y \sim N(0, 1),$$

$$V_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y \sqrt{T-t}}) e^{-y^2/2} dy.$$

Si $H(S) = (S_T - K)_+$ entonces

$$F(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (1.6)$$

con

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy,$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

A la expresión (1.6) se le llama la fórmula de Black-Scholes.

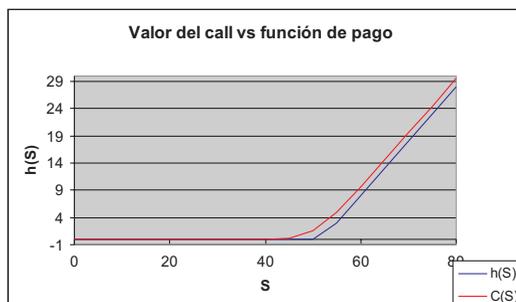


Figure 1.4. Comparación de una opción call contra su función de pago.

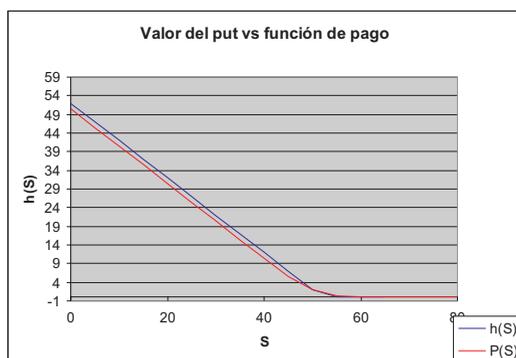


Figure 1.5. Comparación de una opción put contra su función de pago.

Para obtener el valor de un put P_t se puede usar el mismo razonamiento o en caso de tener las mismas características que el call C_t , utilizar la siguiente igualdad que se conoce con el nombre de paridad put-call para opciones europeas

$$P_t - C_t = Ke^{-r(T-t)} - S_t,$$

con C_t el valor del call al tiempo t .

4. El método Monte-Carlo

Se sabe por la Ley de los grandes números que un buen estimador del valor esperado de una variable aleatoria continua X con distribución F es la media aritmética de una muestra finita de variables aleatorias, independientes, con distribución F . Es decir, sea X_1, X_2, \dots, X_n una

muestra de variables aleatorias, independientes, con distribución F , con primero y segundo momentos finitos, y denotemos por

$$\tilde{X}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i$$

entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta < 1$, existe un natural M tal que para toda $m \geq M$ se tiene que

$$P(|E(X) - \tilde{X}_m| < \varepsilon) > 1 - \delta.$$

Esta es la idea que está detrás del método de Monte-Carlo y que se usa para estimar el valor esperado de una función g continua cuyo argumento es una variable aleatoria con distribución F . Si se tiene una muestra de variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas con distribución F , entonces

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i).$$

Estimación del error. Sea X una variable aleatoria con distribución F , con primero y segundo momento finitos, g una función continua y sea $I = E(g(X))$. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra de variables aleatorias independientes con distribución F y denótese por $\hat{I}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i)$. Si σ es la desviación estándar de $g(X)$, entonces se tiene que $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ es la desviación estándar de \hat{I}_M , por ser las X_i variables aleatorias independientes.

Por el Teorema del Límite Central se sabe que para M grande, $Z_M = \frac{(I - \hat{I}_M)}{\sigma/\sqrt{M}}$ se comporta como una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno por lo que

$$P(|I - \hat{I}_M| < \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}) = P(|Z_M| < c) \approx 2\Phi(c),$$

con $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-x^2/2} dx$ y c se selecciona dependiendo de la probabilidad que se desee obtener. Por ejemplo, si se quiere que la probabilidad sea .95, se selecciona a c como 1.96.

Por lo tanto el error que se comete al usar el método de Monte-Carlo es aproximadamente $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$. Como se observa, si $\sigma \approx 1$, se requiere de $M = 10^4$ para tener al menos dos cifras significativas.

Este resultado permite estimar un intervalo de confianza de $\alpha\%$. Para ello se selecciona c de tal forma que $\Phi(c) = \frac{\alpha}{2}$. De esta manera, con probabilidad α podemos asegurar que el valor exacto de la esperanza I está en el intervalo

$$\left[\hat{I}_M - \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}, \hat{I}_M + \frac{c\sigma}{\sqrt{M}} \right].$$

El problema para usar el resultado anterior es que hay que conocer el valor de la desviación estándar de $g(X)$. Lo que se hace en la práctica es estimarla por la varianza muestral. Con este intervalo se determina el tamaño que se requiere que tenga M para tener la precisión deseada. Por ejemplo, si se desea tener un intervalo de confianza del 95% de longitud 10^{-2} se debe escoger $M > 4(1.96)^2 \hat{\sigma}_g^2 10^4$.

Propiedades estadísticas

Desde el punto de vista estadístico el método de Monte-Carlo genera un estimador insesgado ya que $E(\hat{I}_M) = I$. Por otro lado, el error cuadrático medio se define por

$$E((I - \hat{I}_M)^2) = E(I - E(\hat{I}_M))^2 + Var(\hat{I}_M); \quad (1.7)$$

dado que el estimador es insesgado, existe una constante $C > 0$ tal que

$$E((I - \hat{I}_M)^2) = Var(\hat{I}_M) \approx \frac{C\sigma^2}{M}.$$

Si se desea reducir el error cuadrático medio lo que hay que hacer es reducir σ o incrementar el tamaño M de la muestra de variables aleatorias. A veces el valor de M es tan grande que es costoso incrementar la muestra, por lo que se ha optado por generar métodos para reducir la varianza; estos métodos se conocen con el nombre de métodos de reducción de varianza. En la sección 1.7 se presenta un ejemplo de estos métodos.

Aplicación de Monte-Carlo a la valuación de opciones europeas. En el caso de la valuación de opciones europeas, el método Monte-Carlo se usa para calcular la siguiente integral

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)} H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})),$$

con y una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno.

Por el método de Monte-Carlo

$$V_t \approx \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{i=1}^M H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y_i\sqrt{T-t}}),$$

con y_i el valor de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno. A continuación se presenta el algoritmo para generar esta aproximación y un intervalo de confianza del 95%. El cálculo de la media y la varianza muestral se realiza en forma recursiva, ver [21].

4.1. Algoritmo de Monte-Carlo. Para valuar una opción al tiempo $t = 0$ o sea V_0 , denotemos por Var_i a la varianza acumulada hasta la iteración i . Entonces dado S_0 , K , r , σ y T se hace lo siguiente:

1. Se inicializan las variables: $\hat{V}_0 = 0$, $Var_1 = 0$ y

$$\hat{V}_1 = H(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_1 \sqrt{T}}),$$

con y_1 el valor de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno.¹

2. Para cada trayectoria i , con $i = 2, \dots, M$ se hacen lo siguientes dos pasos:

- (a) Se calcula

$$H_i = H\left(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}}\right),$$

con y_i el valor de una variable normal con media cero y varianza uno.

- (b) Se calculan $\hat{V}_i = \hat{V}_{i-1} + \frac{H_i - \hat{V}_{i-1}}{i}$,

$$Var_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)Var_{i-1} + i(\hat{V}_i - \hat{V}_{i-1})^2.$$

3. $\hat{V}_M = e^{-rT}\hat{V}_M$.

4. Se determina el intervalo de confianza del 95%

$$V_0 \in \left[\hat{V}_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \hat{V}_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

En la Tabla 1.1 se presentan algunos resultados numéricos para el caso de un put con datos: $K = 52$, $S_0 = 50$, $T = 6$ meses, $r = 0.06$ y $\sigma = 0.12$; el valor exacto del put es 1.9415. El intervalo de confianza se indica por [Lim. Sup, Lim. Inf] y se muestran los valores que se obtienen con Monte-Carlo para distintos valores de M . Obsérvese que el valor exacto se encuentra en todos los intervalos de confianza y que la longitud de dicho intervalo tiende a cero cuando M tiende a infinito.

M	Put	Lím. Inf.	Lím. Sup.	Long. Inter.
100	2.0498	1.5401	2.5595	1.0194
1000	2.0213	1.8604	2.1823	0.3219
10000	1.9509	1.9019	2.0000	0.0981
100000	1.9386	1.9230	1.9541	0.0311
1000000	1.9447	1.9398	1.9496	0.0098

Tabla 1.1. Intervalo de confianza para Monte-Carlo.

¹En el anexo A.3 se presenta cómo se genera computacionalmente una variable pseudo-aleatoria con distribución normal con media 0 y varianza 1.

Error cuadrático medio para MC aplicado a opciones europeas. Como se vio antes el error cuadrático medio (ECM) que se comete al estimar una esperanza de una variable aleatoria $\theta = E(X)$ por medio del estimador $\hat{\theta} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i$ de Monte-Carlo es igual a

$$E(\theta - \hat{\theta})^2 = E(\theta - E(\hat{\theta}))^2 + Var(\hat{\theta}),$$

con $Var(\hat{\theta}) \approx \frac{\sigma_X^2}{M}$.

Al usar Monte-Carlo para estimar el valor de una opción al tiempo V_t el error va a ser distinto si se utiliza el precio exacto del subyacente al tiempo T o si se aproxima su valor por medio de un esquema numérico. El valor S_T se calcula en forma exacta a partir de S_t por

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y_i \sqrt{T-t}} \quad \text{con } y_i \sim N(0, 1).$$

Si se calcula la opción por Monte-Carlo de la siguiente forma

$$\hat{V}_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{i=1}^M H \left(S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y_i \sqrt{T-t}} \right)$$

el estimador \hat{V}_t es insesgado y el error cuadrático medio está dado por

$$ECM(\hat{V}_t) = E((V_t - \hat{V}_t)^2) = Var(\hat{V}_t) \approx \frac{C}{M}.$$

Si se aproxima el valor del subyacente en T , lo primero que hay que hacer es discretizar el intervalo de tiempo $[0, T]$ de la siguiente forma: sea $N \in \mathcal{N}$ y sea $h = T/N$ y definamos $t_0 = 0$, $t_i = ih$ y $t_N = T$. El valor aproximado de S en los puntos t_i se generan por medio de un esquema numérico. Si el valor aproximado del subyacente se denota por $S_i^h = S_{t_i}^h$, entonces el estimador de Monte-Carlo es igual a

$$\hat{V}_t^h = \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{j=1}^M H(S_N^{h,j}),$$

con $S_N^{h,j}$ el valor aproximado al tiempo T que puede tomar el subyacente en una trayectoria j . El estimador \hat{V}_t^h ya no es insesgado ya que $E(\hat{V}_t^h) \neq V_t$ por lo que el error cuadrático medio es igual a

$$ECM(\hat{V}_t^h) = E(V_t - E(\hat{V}_t^h))^2 + Var(\hat{V}_t^h).$$

En el caso de usar como esquema numérico el método de Euler, ver Anexo A sección 5, se tiene que

$$S_i^h = (1 + rh)S_{i-1}^h + \sigma S_{i-1}^h y_i \sqrt{h} \quad i = 1, \dots, N,$$

con y_i el valor de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza uno. El error cuadrático medio depende tanto de h como de M y el orden

es igual a

$$ECM(\hat{V}_t^h) \approx C_1 h^2 + \frac{C_2}{M}$$

con C_1 y C_2 constantes positivas, siempre que la función de pago sea continua. Nótese que en este caso el método es asintóticamente insesgado, o sea que tiende a cero cuando h tiende a cero.

Para ilustrar el comportamiento de Monte-Carlo con la aproximación del proceso por Euler se presenta en la Tabla 1.2 resultados numéricos para el put vainilla europeo que se utilizó en la Figura 1.1 con $h = 0.5, 0.05$ y 0.005 . El valor exacto es 1.9415.

	$h = 0.5$	Intervalo	$h = 0.05$	Intervalo	$h = 0.005$	Intervalo
10^3	1.8529	[1.693,2.013]	1.8905	[1.731,2.005]	1.8933	[1.74,2.057]
10^4	1.9187	[1.866,1.971]	1.9581	[1.907,2.009]	1.9287	[1.878,1.979]
10^5	1.8866	[1.870,1.903]	1.9461	[1.93,1.962]	1.9425	[1.926,1.959]

Tabla 1.2. Estimación de un put vainilla europea con MC-Euler.

Como se observa, cuando $h = 0.5$, el ECM es dominado por el valor de h por lo que no vale la pena utilizar valores más grandes de M para compensar el error de h ; al incrementar el valor de M se excluye el valor exacto del intervalo de confianza, como sucede para $h = 0.5$ y $M = 10^5$. Conforme se reduce h , los valores mejoran y como era de esperarse la mejor aproximación se obtiene para $h = 0.005$ y $M = 10^5$ cuando h es más pequeño y h y $1/M$ son del mismo orden.

5. Valuación de opciones asiáticas

Las opciones europeas que se comentaron en la sección anterior, dependen sólo del valor que tiene el subyacente, S_t , en el instante que se ejerce. Por ejemplo, para el caso de una opción europea, si al final del tiempo de maduración el precio sufre un cambio fuerte, la opción cambiaría bruscamente de estar *in the money*² a estar *out the money*³. Una forma de evitar estos cambios repentinos en el precio de la opción, es suscribir un contrato sobre el valor promedio del precio del subyacente. Por otro lado, el hecho de que una opción esté basada en una media, reduce cualquier distorsión posible en los precios debida a la carencia

²Para el caso de un call, quiere decir que el precio del subyacente es mayor que el precio de ejercicio.

³Para el caso del un call, quiere decir que el precio del subyacente es menor que el precio de ejercicio

de un mercado suficientemente amplio del subyacente. Quizá lo anterior sean las dos principales razones por las que la utilización de este tipo de opciones ha tenido un gran auge en el ámbito financiero en los últimos años.

El hecho de que el pago en el momento de ejercicio dependa de una media, posibilita muchos usos para este tipo de opciones. Por otro lado, debido a que fue el Banco Trust de Tokio la primera institución financiera que ofreció este tipo de opciones, se les denomina opciones asiáticas. Además como el precio no depende del precio spot sino del precio medio, son opciones dependientes de la trayectoria del precio del subyacente.

Existen diversos tipos de opciones asiáticas y se clasifican de acuerdo con lo siguiente.

1. La media que se utiliza puede ser aritmética o geométrica. La que más se utiliza en la actualidad es la media aritmética. Por otro lado, si la media utilizada es la geométrica el cálculo del precio de la opción es relativamente fácil de calcular.
2. Si la media se calcula para el precio del subyacente, entonces la opción se dice que tiene precio de ejercicio fijo. O bien, si la media se utiliza para el precio de ejercicio, entonces se dice que la opción tiene precio de ejercicio flotante.
3. Si la opción sólo se puede ejercer al final del tiempo del contrato se dice que es asiática de tipo europeo o *euroasiática*, y si puede ejercer en cualquier instante, durante la vigencia del contrato se denomina asiática de tipo americano.

Por lo anterior, básicamente los tipos de opciones euroasiáticas son:

- Call con precio de ejercicio fijo, con función de pago: $(A - K)_+$.
- Put con precio de ejercicio fijo, con función de pago: $(K - A)_+$.
- Call con precio de ejercicio flotante, con función de pago: $(S - A)_+$.
- Put con precio de ejercicio flotante, con función de pago: $(A - S)_+$.

En donde, A es el promedio del precio del subyacente. En caso de que el promedio sea aritmético, se tiene que:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt,$$

mientras que si el promedio es geométrico, entonces,

$$A = \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt \right).$$

Como se comentó antes, la valuación de opciones con media geométrica es relativamente sencilla, pero el hecho de que la media sea aritmética, plantea ciertas dificultades. La primera es que el valor de la opción depende de la trayectoria, por lo que si se utiliza un modelo de árbol

binario, se deben tomar en cuenta todas las posibles trayectorias. Si se tienen n nodos, el número de trayectorias posibles es 2^n , lo cual, para valores grandes de n se vuelve computacionalmente difícil de calcular.

La segunda dificultad es, en el marco de valuación de precios de Black y Scholes, que si el proceso de los precios del subyacente sigue un proceso de movimiento browniano geométrico, la media aritmética no se distribuye lognormal. De hecho, su distribución es muy complicada de caracterizar, véase Linetsky [17].

En esta parte, se abordará el caso de la opción euroasiática, que de aquí en adelante sólo se denominará opción asiática, y en particular se analizará el call asiático con precio de ejercicio fijo.

Se supondrá un único activo con riesgo, cuyo proceso de precios S_t es un movimiento browniano geométrico, en un mercado que satisface las hipótesis del modelo de Black y Scholes [1]. Bajo estos supuestos, existe una única medida de probabilidad neutra al riesgo, P^* , bajo la cual el precio del activo, S_t , satisface la ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.8)$$

en donde, $S_0 > 0$, r la tasa libre de riesgo, σ la volatilidad, T el tiempo de maduración y W_t es un movimiento browniano estándar.

Se sabe que la solución de (1.8) está dada por

$$S_{t_2} = S_{t_1} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1) + (W_{t_2} - W_{t_1})\sigma} \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (1.9)$$

Por otro lado, la función de pago para un call asiático de promedio aritmético y con precio de ejercicio fijo, está dado por

$$\max\{A(T) - K, 0\} = (A(T) - K)_+.$$

En donde,

$$A(x) = \frac{1}{x} \int_0^x S_u du$$

Por medio de argumentos de arbitraje se puede ver que el valor en el tiempo t de la opción call asiática está dado por

$$V_t(K) = e^{-r(T-t)} E^* [(A(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t],$$

en donde, como ya se había dicho, P^* es la probabilidad neutra al riesgo. Y, como se demuestra en Wilmot [25], lo anterior se reduce a calcular

$$e^{-r(T-t)} E [(A(T) - K)_+].$$

Obsérvese que calcular el call en un tiempo posterior al que se inicia el cálculo del promedio, equivale a valorar una opción call como si se acabase de emitir, pero con un precio de ejercicio modificado.

Para el caso en que $t_0 = 0$ y $t = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} V_0(K) &= e^{-rT} E[(A(T) - K)_+], \\ V_0(K) &= e^{-rt} E\left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right)_+\right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Cuando no haya problema de ambigüedad, denotaremos a $V_0(K)$ simplemente con V_0 . La expresión (1.10) es la que se utilizará posteriormente para el cálculo del valor del call asiático con precio de ejercicio fijo.

Al igual que en el caso de las opciones estándar, no es restrictivo tratar sólo con el call, ya que el valor del put, con las mismas características, puede calcularse por medio de la paridad put-call para opciones asiáticas, véase [4], [17] o [2].

Paridad put-call para opciones asiáticas.

$$e^{-rt} E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right)_+ - e^{-rt} E\left(K - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt\right)_+ = e^{-rt} E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\right).$$

Los métodos para calcular el precio de la opción se pueden agrupar en tres tipos, aquéllos que utilizan un modelo binomial (árboles binarios), los que plantean la solución de una ecuación diferencial parcial y los que utilizan métodos Monte Carlo. En la sección siguiente se presentan los esquemas que se utilizarán para la aproximación mediante el método Monte Carlo.

6. Esquemas numéricos

Con base en los resultados de la sección anterior, la expresión que se quiere calcular es

$$V_0 = e^{-rT} E\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K\right)_+, \quad (1.11)$$

la cual proporciona el valor de un call asiático con precio de ejercicio fijo.

Con objeto de hacerlo mediante el método Monte Carlo, es necesario que se calcule el promedio de S_u , en el intervalo $[0, T]$, y por tanto el valor de la integral en el mismo intervalo. Se debe notar que, como se está suponiendo que el precio del subyacente se rige por un movimiento browniano geométrico, entonces su valor se puede simular de manera exacta.

Se desarrollarán dos esquemas numéricos para aproximar el valor de

$$Y_T = \int_0^T S_u du. \quad (1.12)$$

Para lo dos esquemas se dividirá el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de igual longitud, $h = \frac{T}{N}$, esto determina los tiempos $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N$, en donde $t_i = ih$ para $i = 0, 1, \dots, N$.

En el primer esquema numérico se tendrá como base las sumas de Riemann, ya que la aproximación se hará de acuerdo con

$$\int_0^T S_u du \approx h \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}. \quad (1.13)$$

De este modo, si con el método de Monte Carlo se generan M trayectorias, entonces la aproximación estará dada por:

$$\widehat{V}_0^{(1)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left(\frac{h}{T} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K \right)_+.$$

Si en la ecuación anterior se sustituye $h = \frac{T}{N}$ se obtiene

$$\widehat{V}_0^{(1)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K \right)_+. \quad (1.14)$$

La ecuación (1.14) es el esquema 1 del método Monte Carlo que se utilizará para aproximar V_0 .

Para obtener un segundo esquema, se aproxima (1.12) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^T S_u du &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_u du, \\ &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} [S_{t_i} + S_{t_{i+1}}] = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ S_{t_i} + S_{t_i} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Se desarrolla en serie de Taylor y se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^T S_u du &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} \left(2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 h^2 + 2 \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma \right. \\ &\quad \left. \left. + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \sigma^2 \right\} + \dots \right) \end{aligned}$$

Suponiendo que h es pequeña, sólo se conservan los términos de orden a lo más h y observando que debido a que la variación cuadrática de

$\frac{1}{2} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma$ se cancela con $-\frac{1}{2} \sigma^2 h$, se obtiene

$$\int_0^T S_u du \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} (2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma).$$

Con base en lo anterior, se tiene

$$\widehat{V}_0^{(2)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[\frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} (2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sigma) - K \right]. \quad (1.15)$$

La relación 1.15 es el segundo esquema, que se empleará para aproximar V_0 por el método Monte Carlo.

En la sección siguiente se muestran los resultados de las aproximaciones obtenidas con los esquemas dados en (1.14) y (1.15).

7. Resultados de la simulación Monte Carlo

Como caso de prueba, para la opción asiática, se seleccionó el de un call asiático con precio inicial $S_0 = 100$, precio de ejercicio $K = 100$, tasa libre de riesgo $r = 0.10$, volatilidad $\sigma = 0.20$ y $T = 1$ año y el número de subdivisiones de 100. El precio es ≈ 7.04 , véase Lapeyre [15].

S	K	r	σ	T
100	100	0.1	0.20	1
M	Call	Lím. Inf.	Lím. Sup.	Long. Inter.
1000	7.0716	6.5466	7.5966	1.0501
10000	7.0960	6.9273	7.2647	0.3373
100000	6.9903	6.9377	7.0429	0.1053
1000000	6.9768	6.9602	6.9934	0.0332

Tabla 1.3. Resultados obtenidos al aplicar el esquema *sumas de Riemann*.

Si se quiere aumentar la precisión, debe aumentarse el número de trayectorias en el método de Monte Carlo, y también el número de subintervalos de tiempo, con lo que el tiempo de computadora aumentaría de manera significativa; por lo que parece necesario utilizar algún método que reduzca la varianza de las aproximaciones obtenidas por los métodos anteriores. Eso es lo que se buscará hacer en la sección siguiente.

S	K	r	σ	T
100	100	0.1	0.20	1
M	Call	Lím. Inf.	Lím. Sup.	Long. Inter.
1000	7.5005	6.9466	8.0544	1.1078
10000	7.1121	6.9426	7.2815	0.3389
100000	7.0197	6.9668	7.0726	0.1058
1000000	7.0435	7.0268	7.0603	0.0335

Tabla 1.4. Resultados obtenidos al aplicar el esquema del *trapecio*.

8. Métodos de reducción de varianza: variable de control

La principal desventaja el método Monte-Carlo es la lentitud con la que converge. La rapidez de convergencia depende de la relación σ/\sqrt{M} . Para acelerar la convergencia o se disminuye el valor de σ o se incrementa el número de trayectorias. Incrementar el número de trayectorias incide en el tiempo de cálculo computacional; por otro lado, como vimos en la sección 4, el error cuadrático medio de un estimador insesgado depende únicamente de la varianza del estimador. Por lo que reducir la varianza del estimador se ha convertido en el objetivo primordial para aquellos que quieren acelerar la convergencia de Monte-Carlo, sin incrementar su costo. Esto ha dado lugar a diversas técnicas entre las que destacan: variables de control, variables antitéticas, muestreo de importancia, por condicionamiento y por muestreo estratificado, entre otras. En este capítulo se presenta el método de variables de control y su aplicación a la estimación del valor exacto de la opción. Para saber más de los otros métodos ver [6], [16] y [21].

Método de variable de control. Este método consiste en encontrar otra variable que esté correlacionada con la variable de interés. Supongamos que X es una variable aleatoria, para la cual deseamos obtener una estimación de $E(X)$. Sea Y otra variable aleatoria, tal que $E(Y)$ es conocida. Si definimos una tercer variable aleatoria Z por

$$Z = X + \beta[Y - E(Y)].$$

Entonces, $E[Z] = E(X + \beta[Y - E(Y)])$. Es fácil ver que:

$$E(Z) = E(X).$$

Pero,

$$Var(Z) = Var(X) + \beta^2 Var(Y) + 2\beta cov(X, Y).$$

Como se puede apreciar, la $Var(Z)$ es una función cuadrática de β . El valor de β , llamémosle β^* , que minimiza el valor de $Var(Z)$, es

$$\beta^* = -\frac{cov(X, Y)}{Var(Y)}.$$

El valor mínimo está dado por

$$Var(X + \beta^*[Y - E(Y)]) = Var(X) - \frac{[cov(X, Y)]^2}{Var(Y)}. \quad (1.16)$$

La reducción relativa de la varianza la obtenemos, si dividimos la ecuación (1.16) entre $Var(X)$,

$$\begin{aligned} \frac{Var(X + \beta^*[Y - E(Y)])}{Var(X)} &= 1 - \frac{[cov(X, Y)]^2}{Var(X)Var(Y)}. \\ &= 1 - [\rho(X, Y)]^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

En donde, $\rho(X, Y)$ es el coeficiente de correlación entre X y Y y está dado por

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

La ecuación (1.17) nos dice que la reducción de varianza obtenida al emplear la variable de control Y es de $100\rho^2(X, Y)\%$.

Por lo regular, aunque $E(Y)$ es conocida, los valores de $Var(Y)$, de $cov(X, Y)$, así como de $Var(X)$, no son conocidos, sino que se tienen que estimar a partir de los datos simulados.

Si tenemos M parejas de datos simulados, (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, M$, podemos emplear

$$\widehat{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^M \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{M - 1},$$

y

$$\widehat{Var}(Y) = \sum_{i=1}^M \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{M - 1},$$

como los estimadores de interés. Con esto podemos aproximar β^* por medio de $\hat{\beta}^*$, en donde

$$\hat{\beta}^* = -\frac{\widehat{cov}(X, Y)}{\widehat{Var}(Y)}.$$

Ahora bien, la varianza del estimador de $Z = X + \beta^* [Y - E(Y)]$ está dada por

$$Var((\bar{X} + \beta^* [\bar{Y} - E(Y)])) = \frac{1}{n} \left(Var(X) - \frac{cov^2(X, Y)}{Var(Y)} \right).$$

Aplicación a la valuación de opciones asiáticas. En el caso de las opciones asiáticas con media aritmética, se sabe que aunque el precio del subyacente tenga una distribución lognormal, la media aritmética tiene una distribución que sólo es tratable numéricamente, véase Linetsky [17]. Ahora bien, la media geométrica es una cota inferior para la media aritmética, y por otro lado su esperanza puede calcularse como se indica a continuación; por lo que se utilizará como nuestra variable de control.

El valor esperado de la variable de control es

$$\tilde{V}_0 = e^{-rT} E \left[e^{\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt\right)} - K \right]_+.$$

Sustituyendo $S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ en la ecuación anterior, tenemos

$$\tilde{V}_0 = e^{-rT} E \left[\left(S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_t dt} - K \right) \right]_+.$$

Y como puede verse en Lamberton [14], se tiene que el valor de \tilde{V}_0 está dado por

$$\tilde{V}_0 = e^{-\frac{1}{2} \left[r + \frac{\sigma^2}{6} \right] T} S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2). \quad (1.18)$$

en donde,

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{\frac{T}{3}}},$$

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T/3}.$$

Con base en la sección anterior y de acuerdo con el método desarrollado por Kemna y Vorst [11], en el que proponen aproximar $\frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ por medio de $e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du}$. Estas dos variables aleatorias esperamos que sean similares, para valores de r y σ no demasiado grandes. De hecho la segunda, que es una media geométrica continua, es una cota inferior para la primera.

Es fácil ver que la variable aleatoria $e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du}$ tiene una distribución normal y su esperanza está dada por,

$$E \left[e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du} - K \right) \right]_+ = e^{-\frac{1}{2} \left[r + \frac{\sigma^2}{6} \right] T} S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

que tiene una forma del estilo de la fórmula de Black y Scholes.

Por lo tanto, podemos emplear como variable de control a la variable aleatoria Z , definida por

$$Z = e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du} - K \right)_+.$$

Ahora bien, como podemos sustituir S_t por $S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W_u}$, al hacer esto en la ecuación anterior, tenemos

$$Z = e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})u + \sigma W_u}) du} - K \right)_+,$$

$$Z = e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \left[\int_0^T \ln(S_0) du + \int_0^T (r - \frac{\sigma^2}{2}) u du + \sigma \int_0^T W_u du \right]} - K \right)_+,$$

$$Z = e^{-rT} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_u du} - K \right)_+.$$

Se debe notar que la variable de control se calcula con la misma trayectoria del movimiento browniano, que ya se utilizó para la variable S_t . Por lo que debemos adaptar cada uno de los esquemas para simular la variable de control.

Entonces, los esquemas para la aproximación de la variable de control Z quedan de la manera siguiente:

$$Z_T^{R,n} = e^{-rT} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{n-1} h W_{t_k}} - K \right)_+, \quad (1.19)$$

$$Z_T^{T,n} = e^{-rT} \left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} (W_{t_k} + W_{t_{k+1}})} - K \right)_+. \quad (1.20)$$

En cada uno de los cuales utilizamos el mismo tipo de aproximación para $\int_0^T W_u du$ que para $\int_0^T S_u du$.

En la siguiente sección se presentan los resultados de las aproximaciones obtenidas al aplicar los esquemas anteriores.

9. Resultados numéricos con reducción de varianza

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron para el caso de prueba, un call asiático con precio de ejercicio fijo y la técnica de reducción de varianza, para aproximar su valor, los resultados se presentan redondeados a cuatro decimales. Las características de este call son: $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 10\%$, $\sigma = 20\%$ y $T = 1$, el número de subdivisiones en el tiempo es de 100. El valor aproximado de este call es 7.04.

En este esquema, aunque la longitud del intervalo se reduce considerablemente, comparado con la Tabla 1.3, los intervalos de confianza, no “atrapan” al valor verdadero.

M	Call	Lím. Inf.	Lím. Sup.	Long. Inter.
100	7.0179	6.9774	7.0583	0.0809
1000	7.0185	7.0031	7.0339	0.0308
10000	7.0152	7.0104	7.0200	0.0096
100000	7.0173	7.0158	7.0189	0.0031

Tabla 1.5. Resultados obtenidos al aplicar el esquema *sumas de Riemann*, con reducción de varianza.

M	Call	Lím. Inf.	Lím. Sup.	Long. Inter.
100	7.0584	7.0124	7.1043	0.0918
1000	7.0414	7.0256	7.0572	0.0317
10000	7.0421	7.0371	7.0471	0.0100
100000	7.0438	7.0422	7.0454	0.0032

Tabla 1.6. Resultados obtenidos al aplicar el esquema del *trapecio* con reducción de varianza.

Es interesante notar que en este esquema, la longitud del intervalo para 1000 trayectorias de Monte Carlo es del mismo orden que el de 100,000 para el método sin reducción de varianza, véase la Tabla 1.4. Los resultados anteriores se obtuvieron con la implementación del algoritmo siguiente para el cálculo del valor de la opción asiática,

$$I = V_0 = e^{-rT} E \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right].$$

Algoritmo Monte-Carlo con reducción de varianza para valorar una opción call asiática con precio de ejercicio fijo.

Denotemos con:

X_i al valor obtenido para la opción mediante el esquema (1.14) con la trayectoria i .

Y_i al valor obtenido para la variable de control mediante el esquema (1.19) con la trayectoria i .

\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i las medias aritméticas del valor de la opción y de la variable de control, respectivamente, hasta la iteración i .

$VarX_i, VarY_i$ y $CovXY_i$ a la varianza del valor de la opción, la varianza de la variable de control y la covarianza entre estas variables, respectivamente, hasta la iteración i .

1. Entrada: Valor inicial del subyacente S_0 , precio de ejercicio K , tiempo de maduración T , la tasa libre de riesgo r , volatilidad anual σ .
2. Inicializar valores: $\tilde{X}_0 = 0$, $VarX_1 = 0$, $VarY_1 = 0$ y $CovXY_1 = 0$.
3. Calcular X_1 con el esquema (1.14) y Y_1 mediante el esquema (1.19)
4. Hacer $\tilde{X}_1 = X_1$ y $\tilde{Y}_1 = Y_1$.
5. Para cada trayectoria i , con $i = 2, \dots, M$
 - a) Calcular X_i, Y_i .
 - b) Calcular $\tilde{X}_i = \tilde{X}_{i-1} + \frac{X_i - \tilde{X}_{i-1}}{i}$, $\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_{i-1} + \frac{Y_i - \tilde{Y}_{i-1}}{i}$.
 - c) Calcular $VarX_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) VarX_{i-1} + i \left(\tilde{X}_i - \tilde{X}_{i-1}\right)^2$.
 - d) Calcular $VarY_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) VarY_{i-1} + i \left(\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_{i-1}\right)^2$.
 - e) Calcular $CovXY_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) CovXY_{i-1} + \frac{1}{i}(X_i - \tilde{X}_{i-1})(Y_i - \tilde{Y}_{i-1})$.
6. Actualizar los valores de $\tilde{X}_M, \tilde{Y}_M, VarX_M, VarY_M$ y $CovXY_M$, "trayéndolos" a valor presente.
7. Calcular EY mediante la fórmula (1.18) y $\beta = -\frac{CovXY_M}{VarY_M}$.
8. Calcular $Z_M = \tilde{X}_M + \beta(\tilde{Y}_M - EY)$ y $VarZ_M = VarX_M - \frac{(CovXY_M)^2}{VarY_M}$.
9. Se determina el intervalo de confianza del 95%

$$I \in \left[\tilde{Z}_M - \frac{1.96\sqrt{VarZ_M}}{\sqrt{M}}, \tilde{Z}_M + \frac{1.96\sqrt{VarZ_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

Cálculo de la cobertura

En este capítulo se tratará el tema de la cobertura que consiste en calcular, al tiempo inicial la estrategia de inversión que debe seguir quien suscribe la opción para que, a la fecha de vencimiento, la prima de la opción sea igual al valor de la opción al tiempo T . En el caso de una opción vainilla europea es posible determinar en forma exacta la cobertura; la primera sección se ocupa de este punto. Dado que para varias opciones exóticas no es posible calcular en forma analítica la cobertura, en la sección dos se presenta la aproximación por Monte-Carlo por dos métodos distintos: diferencias finitas y el método *pathwise-derivative* o derivada trayectorial. Por último, en la tercera sección se presenta el cálculo numérico de las griegas que son funciones que miden la sensibilidad del valor de la opción a variaciones en los parámetros como la volatilidad, la tasa de interés y el tiempo al vencimiento.

1. Cálculo de la cobertura para opciones europeas vainilla

En esta sección se considera que se cumplen las hipótesis del modelo de Black-Scholes, en particular, que el mercado se compone de un activo sin riesgo y otro con riesgo. En este mercado, un portafolio consiste en un capital invertido en los activos antes mencionados. El monto invertido en el activo sin riesgo al tiempo t se denota por ϕ_t^0 y por ϕ_t el número de acciones que se adquieren del subyacente. Recordemos que para cada $t > 0$, ϕ_t^0 y ϕ_t toman valores en los reales.

El valor del portafolio al tiempo t se denota por π_t y es igual a

$$\pi_t = \phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t. \quad (2.1)$$

Supongamos que el portafolio es autofinanciable, lo que implica que

$$d\pi_t = r\phi_t^0 e^{rt} dt + \phi_t dS_t. \quad (2.2)$$

Como se vio en el capítulo anterior, para el modelo de Black-Scholes existe una única probabilidad P^* , equivalente a P , bajo la cual los precios descontados del subyacente son martingala. Las consecuencias de esto son muy importantes ya que, por los teoremas fundamentales

de la valuación de activos, se puede afirmar que en el modelo de Black-Scholes cualquier opción europea se replica por medio de un portafolio autofinanciable y admisible π_t cuyo valor en cualquier tiempo $t \in [0, T]$ coincide con el de la opción. Es decir

$$V_t = \pi_t. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, en principio el problema de la cobertura está resuelto, hay que determinar para cada t el portafolio π_t . Sin embargo, para ello hay que encontrar la estrategia de inversión.

Si se aplica la fórmula de Ito a la función V , suponiendo que esta función tiene la regularidad necesaria, se obtiene

$$dV(t, S) = \left(\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} dS.$$

Suponiendo que S satisface la ecuación diferencial estocástica del proceso del browniano geométrico, ver (1.1), se tiene que

$$dV(t, S) = \left(\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} dW_t. \quad (2.4)$$

Por otro lado, como $d\pi = dV$ entonces al igualar (2.4) y (2.2) se obtienen dos ecuaciones, una para la parte determinista y otra que depende del browniano.

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} = r \phi_t^0 e^{rt} + \mu S \phi_t \quad (2.5)$$

$$S \sigma \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} = S \sigma \phi_t.$$

Esta última implica que

$$\phi_t = \frac{\partial V(t, S)}{\partial S}. \quad (2.6)$$

En consecuencia, al tiempo t hay que invertir en $\frac{\partial V(t, S)}{\partial S}$ acciones del subyacente. El valor de ϕ_t^0 se encuentra al substituir ϕ_t en la ecuación (2.1) y al usar que $V_t = \pi_t$. Al despejar ϕ_t^0 se obtiene

$$\phi_t^0 = \left(V_t - \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} S_t \right) e^{-rt}.$$

De esta forma se determina la estrategia de inversión del portafolio replicante que es lo que se llama la cobertura de la opción.

Si substituímos el valor de ϕ_t y ϕ_t^0 en la ecuación (2.5) y se cancelan los términos iguales se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} + r S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} - r V(t, S) = 0,$$

que se conoce con el nombre de la ecuación de Black-Scholes. Esta ecuación en derivadas parciales, junto con condiciones finales y de frontera adecuadas, permite calcular el valor de la opción sin el cálculo de una esperanza. Obsérvese que esta ecuación es totalmente determinista, para conocer más sobre este enfoque consultar [25].

Cálculo de las griegas. La función $\frac{\partial V(t,S)}{\partial S}$ mide también la sensibilidad del valor de la opción a variaciones en el precio del subyacente. El estudio de qué tan sensible es el valor de la opción a las variaciones de las variables y de los parámetros es una forma de medir el riesgo de la opción. A este estudio se le conoce con el nombre de cálculo de las griegas, porque se usan las letras griegas para denotarlas. A $\frac{\partial V(t,S)}{\partial S}$ se le conoce como la delta al tiempo t y se denota por Δ_t .

En el caso de las opciones vainilla europeas se puede calcular en forma exacta el valor de Δ_t simplemente derivando con respecto a S la fórmula de Black-Scholes (1.6). De esta forma se obtiene que para un call $\Delta_t = N(d_1)$ y para un put es $\Delta_t = N(d_1) - 1$.

Se listan a continuación a qué son iguales otras derivadas importantes de un call

$$\begin{aligned}\Gamma &:= \frac{\partial^2 V(t,S)}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-d_1^2/2}, \\ Vega &:= \frac{\partial V(t,S)}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2}, \\ \rho &:= \frac{\partial V(t,S)}{\partial r} = TK e^{-rT} N(d_2), \\ \Theta &:= \frac{\partial V(t,S)}{\partial t} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-d_1^2/2} - rK e^{-rT} N(d_2).\end{aligned}$$

2. Cálculo de la cobertura por Monte-Carlo

Para determinar tanto la cobertura como las griegas hay que calcular la derivada de un valor esperado respecto a una variable θ

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} E^*(Y(S_T(\theta))),$$

con Y la función de pago descontada y la esperanza se calcula bajo la probabilidad neutra al riesgo.

Hay muchas formas de calcular numéricamente esta derivada, la más sencilla es aproximar la derivada por diferencias finitas, sin embargo este enfoque tiene la desventaja de generar un estimador que no es insesgado. Otro método se obtiene al considerar que el cálculo de una esperanza de una variable aleatoria continua es el cálculo de una integral. Bajo ciertas condiciones, la derivada de una integral se puede intercambiar

por la integral de una derivada, lo que evita aproximar la derivada y permite generar estimadores insesgados. Esta idea da lugar al método de derivada trayectorial. A continuación se presentan ambos enfoques.

Diferencias finitas. Una forma de aproximar la derivada es por medio de un cociente de diferencias finitas. Hay muchas formas de construir este cociente; por ejemplo, la más sencilla es con diferencias finitas hacia adelante

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} \approx \frac{V(\theta + h) - V(\theta)}{h}.$$

Si denotamos por

$$\hat{Y}(\theta + h) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y(S_T^i(\theta + h)) \quad \text{y} \quad \hat{Y}(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y(S_T^i(\theta)),$$

entonces combinando Monte-Carlo con diferencias finitas hacia adelante da lugar al siguiente estimador

$$\hat{\Delta}_F = \frac{[\hat{Y}(\theta + h) - \hat{Y}(\theta)]}{h}.$$

El valor esperado de este estimador es igual a

$$E(\hat{\Delta}_F) = \frac{V(\theta + h) - V(\theta)}{h}.$$

Si V es tres veces diferenciable respecto a θ , por el teorema de Taylor, se obtiene que

$$V(\theta + h) = V(\theta) + h \frac{dV(\theta)}{d\theta} + h^2 V''(\theta) + o(h^2)$$

lo que nos permite probar que el estimador no es insesgado ya que

$$E(\hat{\Delta}_F) - \frac{dV(\theta)}{d\theta} = V''(\theta)h + o(h).$$

Este error puede reducirse si en lugar de usar diferencias finitas hacia adelante se utilizan diferencias finitas centradas

$$\hat{\Delta}_c = \frac{\hat{Y}(\theta + h) - \hat{Y}(\theta - h)}{2h}.$$

En este caso, si V es cuatro veces diferenciable

$$E(\hat{\Delta}_c) - \frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{6} V'''(\theta)h^2 + o(h^2).$$

El estimador sigue siendo no insesgado, pero el orden del error es más pequeño. Por otro lado, ambos errores tienden a cero cuando h tiende a cero, por lo que son estimadores asintóticamente insesgados.

Por lo que respecta a la varianza del estimador se tiene que

$$Var(\hat{\Delta}_F) = \frac{Var(\hat{Y}(\theta + h) - \hat{Y}(\theta))}{h^2} = \frac{Var(Y(\theta + h) - Y(\theta))}{Mh^2}.$$

El numerador puede, a su vez, depender de h ; la dependencia está en relación de la forma en que se generen $Y(S_T(\theta + h))$ y $Y(S_T(\theta))$. Si son variables independientes

$$Var(Y(\theta + h) - Y(\theta)) \approx 2Var(Y(\theta)).$$

Si son dependientes y por ejemplo, se usan los mismos números aleatorios para generarlas,

$$Var(Y(\theta + h) - Y(\theta)) \approx Ch.$$

En ambos casos cuando h tiende a cero la varianza del estimador se incrementa. Y este es el principal inconveniente de combinar diferencias finitas con Monte-Carlo.

Ilustremos este comportamiento con la estimación de Δ_t para la opción put europea al tiempo $t = 0$. En este caso $\theta = S_0$ y se usarán los mismos números aleatorios para generar $S_T(S_0)$ y $S_T(S_0 + h)$. Es decir, $S_T(S_0) = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)T - \sigma y \sqrt{T}}$ y $S_T(S_0 + h) = (S_0 + h) e^{(r - \sigma^2/2)T - \sigma y \sqrt{T}}$, con y el valor de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza uno. El algoritmo que se usa es el siguiente:

Algoritmo Monte-Carlo-diferencias finitas para valuar delta.

Dado S_0 y h , para valuar Δ_F , al tiempo $t = 0$, se realizan los siguientes pasos:

1. Se inicializan las variables: $V_0 = 0$ y $Var_0 = 0$.
2. Para cada trayectoria i , con $i = 1, \dots, M$ se calculan

(a)

$$Y_i = (K - S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma z_i \sqrt{T}})_+,$$

y

$$X_i = (K - (S_0 + h) e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma z_i \sqrt{T}})_+,$$

con z_i el valor de una variable normal con media cero y varianza uno.

(b) Se calcula

$$V_i = V_{i-1} + \frac{(X_i - Y_i) - V_{i-1}}{i}.$$

- (c) Si $i > 1$ se calcula $Var_i = (1 - \frac{1}{i-1})Var_{i-1} + (i)(V_i - V_{i-1})^2$.
3. Se calcula

$$\hat{\Delta}_F = \frac{1}{h} [e^{-rT} V_M].$$

4. Un intervalo de confianza del 95% para Δ_F está dado por

$$\Delta_F \in \left[\hat{\Delta}_F - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \hat{\Delta}_F + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

La siguiente Tabla 2.1 muestra, para distintos valores de M y h , el valor aproximado de delta cuando se usa Monte-Carlo con diferencias finitas (MC-DF) hacia adelante, para distintos valores de h y M . Los datos son los siguientes: un put europeo vainilla con $K = 52$, $S_0 = 50$, $T = 6$ meses, $r = 0.06$ y $\sigma = 0.12$. El valor exacto de Δ es -0.526407 .

M/h	0.1	Intervalo	0.01	Intervalo	0.001	Intervalo
10^3	-0.5351	[-0.5648,-0.5054]	-0.5216	[-0.5517,-0.4916]	-0.5044	[-0.5344,-0.4744]
10^4	-0.5235	[-0.5329,-0.5141]	-0.5202	[-0.5297,-0.5108]	-0.5231	[-0.5325,-0.5136]
10^5	-0.5219	[-0.5249,-0.5189]	-0.5223	[-0.5253,-0.5193]	-0.5251	[-0.5280,-0.5220]
10^6	-0.5215	[-0.5224,-0.5205]	-0.5262	[-0.5271,-0.5252]	-0.5266	[-0.5275,-0.5256]

Tabla 2.1. Estimación de Delta por MC-DF

Observemos que el error cuadrático medio depende de h y M ; no es posible corregir el error que se introduce al tomar una h grande, incrementando el número de trayectorias. Las mejores aproximaciones se obtienen cuando $h = 0.01$, $M = 100000$, y $h = .001$, $M = 100000$. Esto quiere decir que no vale la pena hacer menor el valor de h para obtener una mejor aproximación. Se puede probar que hay un valor de h^* óptimo y para valores más pequeños que éste, la varianza comienza a crecer deteriorando la aproximación. Algunos autores han publicado trabajos en esta dirección, ver [6]. Por otro lado, el sesgo que se introduce al discretizar la derivada no permite garantizar que el valor exacto está en el intervalo de confianza, como se observa en el caso de $h = 0.1$.

Método de derivada trayectorial. El objetivo de este método es evitar las desventajas del método anterior generando un estimador que sea insesgado y cuya varianza no dependa de h . Bajo ciertas condiciones, la derivada de una esperanza es igual a la esperanza de la derivada, o sea

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} E^*[Y(\theta)] = E^* \left[\frac{dY(\theta)}{d\theta} \right].$$

$Y(\theta)$ es una variable aleatoria para cada θ en un intervalo de los reales. Y es una función que depende de θ y de $\omega \in \Omega$. Entonces, ¿qué significado tiene la derivada de Y respecto a θ ? Se puede interpretar como la tasa de cambio de Y al variar θ cuando se mantiene ω fijo y se define por

$$\frac{dY(\theta)}{d\theta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}.$$

Si podemos afirmar que, con probabilidad uno, esta derivada existe, diremos que es la derivada trayectorial de Y . En el caso de las opciones, esto se cumple para la mayoría de las funciones de pago que sean Lipschitz. En el libro de Glasserman [6] se dan condiciones rigurosas que debe cumplir Y para que exista esta derivada.

Al aplicar esta idea en el cálculo de la cobertura de una opción europea vainilla se denotará por $\mathbb{1}_{[S_T > K]}$ la función indicadora que se define por

$$\mathbb{1}_{[S_T > K]} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T < K \end{cases}$$

y se tiene para $\theta = S_0$,

$$\frac{dY(S_T)}{dS_0} = \frac{dY}{dS_T} \frac{dS_T}{dS_0},$$

por lo que

$$\frac{dY}{dS_T} = e^{-rT} \mathbb{1}_{[S_T > K]} \quad \text{y} \quad \frac{dY}{dS_T} = -e^{-rT} \mathbb{1}_{[K > S_T]}$$

en el caso de un call y de un put, respectivamente. La otra derivada es igual a

$$\frac{dS_T}{dS_0} = \frac{S_T}{S_0}.$$

En suma, la delta para un call vainilla es igual a

$$\Delta = E^* \left(e^{-rT} \mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{S_T}{S_0} \right).$$

La esperanza puede calcularse por medio de Monte-Carlo. Observemos que el estimador que se obtiene es insesgado y la varianza del estimador es del orden $\frac{C}{M}$.

Algoritmo Monte-Carlo con derivada trayectorial para valorar delta. Dado S_0 , para estimar al tiempo $t = 0$ el valor de Δ , para una opción call europea se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Se inicializan las variables: $\Delta_0 = 0$, $Var_0 = 0$.
2. Para cada trayectoria i , con $i = 1, \dots, M$ se calculan

(a)

$$S_T^i = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma z_i \sqrt{T}},$$

con z_i el valor de una variable normal con media cero y varianza uno.

(b)

$$Y_i = \mathbb{1}_{[S_T^i > K]} \frac{S_T^i}{S_0}.$$

(c) $\Delta_i = \Delta_{i-1} + \frac{Y_i - \Delta_{i-1}}{i}$.

(d) Para $i > 1$, $Var_i = (1 - \frac{1}{i-1})Var_{i-1} + i(\Delta_i - \Delta_{i-1})^2$.

3. $\Delta_M = e^{-rT} \Delta_M$
4. Un intervalo de confianza del 95% para Δ está dado por

$$\Delta \in \left[\Delta_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \Delta_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

A continuación se presenta, para el mismo ejemplo que se utilizó para ilustrar diferencias finitas, el desempeño del método de Monte-Carlo con derivada trayectorial (MC-DT). Los datos son los siguientes: un put europeo vainilla con $K = 52$, $S_0 = 50$, $T = 6$ meses, $r = 0.06$ y $\sigma = 0.12$. El valor exacto de Δ es -0.526406 .

M	Lím. inferior	Estimación	Lím. superior	Long. intervalo
10^3	-0.5357	-0.5057	-0.4757	0.0599
10^4	-0.5335	-0.5241	-0.5146	0.0189
10^5	-0.5299	-0.5270	-0.5240	0.0060
$\sim 10^6$	-0.5276	-0.5266	-0.5257	0.0019

Tabla 2.2. Estimación de Delta por MC-DT.

Los resultados muestran que el valor exacto siempre está en el intervalo de confianza y que el error disminuye a medida que M se incrementa, comportamiento que no se observa en la Tabla 2.1 cuando se aplica diferencias finitas.

2.1. Cobertura de la opción asiática. En esta sección se aplica el método de derivada trayectorial al cálculo de la cobertura de la opción asiática. Este caso ilustra el uso del método de derivada trayectorial para aproximar la cobertura de opciones cuya valuación no puede llevarse a cabo en forma analítica.

Como se vio en el segundo capítulo, para la opción asiática sólo existe una solución en series, véase [17], que no es muy práctica, por lo que la valuación debe aproximarse por algún método numérico como el método de Monte-Carlo.

Una opción asiática europea es aquella que sólo puede ejercerse en el tiempo de vencimiento T con función de pago igual a la diferencia entre K y un promedio de valores de S_t . Hay opciones asiáticas cuya función de pago depende del promedio aritmético del precio del subyacente en un número finito de puntos $t_i \in [0, T]$ y hay otras en la que el promedio se calcula tomando en cuenta los precios a lo largo del intervalo $[0, T]$. Por ejemplo, en el caso de un call asiático la función de pago descontada Y

puede tomar las siguientes formas:

$$Y(S) = e^{-rT} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i} - K \right)_+ \quad \text{o} \quad Y(S) = e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+.$$

En ambos casos Y es una función continua. Para el primer caso, el cálculo de la sensibilidad de V respecto a una variable θ , por el método de derivada trayectorial, se hace introduciendo una nueva variable $\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i}$. Entonces

$$\frac{dV}{d\theta} = E^* \left(\frac{dY}{d\theta} \right) = E^* \left(\frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{d\theta} \right).$$

En particular, si $\theta = S_0$, cuando se desea calcular la cobertura de una opción call al tiempo $t = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dS_0} &= E^* \left(\frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dS_0} \right). \\ \frac{dY}{d\bar{S}} &= e^{-rT} \mathbb{1}_{[\bar{S} > K]}, \\ \frac{d\bar{S}}{dS_0} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{dS_{t_i}}{dS_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{S_{t_i}}{S_0}. \end{aligned}$$

Por lo que el valor de delta al tiempo $t = 0$ es igual a

$$\Delta = E^* \left(e^{-rT} \mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{\bar{S}}{S_0} \right).$$

El método de Monte-Carlo puede aplicarse para obtener una estimación del valor esperado, generando un estimador insesgado

$$\hat{\Delta} = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\mathbb{1}_{[\bar{S}^j > K]} \frac{\bar{S}^j}{S_0} \right], \quad (2.7)$$

con error cuadrático medio del orden C/M .

Si deseamos aplicar este método para el caso del promedio a lo largo del intervalo $[0, T]$ las cosas ya no son tan fáciles, dado que el valor de la integral debe ser aproximado a través de un método numérico como los que se usaron en el capítulo anterior en la valuación de opciones asiáticas. Si se selecciona el esquema más sencillo, ver (1.13), entonces, dado $N \in \mathcal{N}$, $h = T/N$ y $t_0 = 0$, $t_i = ih$ y $T_N = T$, la integral se aproxima por

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \approx \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i}.$$

Si se denota con $\overline{S^h} = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i}$ entonces

$$\frac{dV}{d\theta} \approx \frac{d}{d\theta} E^*(e^{-rt}(\overline{S^h} - K)_+).$$

En particular cuando $\theta = S_0$ la cobertura al tiempo $t = 0$ se aproxima por

$$\Delta \approx E^*\left(e^{-rT} \mathbb{1}_{[\overline{S^h} > K]} \frac{\overline{S^h}}{S_0}\right).$$

El estimador que se obtienen al aproximar el valor esperado por Monte-Carlo es igual a

$$\hat{\Delta}^h = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[\mathbb{1}_{[\overline{S_j^h} > K]} \frac{\overline{S_j^h}}{S_0} \right].$$

A continuación se presenta el desempeño de este método, Monte-Carlo con el método de derivada trayectorial (MC-DT), cuando se calcula la cobertura de la opción call asiática europea que se utilizó en la sección 2.3. Los datos son: precio inicial, $S_0 = 100$, precio de ejercicio $K = 100$, tasa libre de riesgo $r = 0.10$, volatilidad $\sigma = 0.20$ y $T = 1$ año.

M/h	0.1		0.01	
	Estimación	Int. de conf. 95%	Estimación	Int. de conf. 95%
10^2	0.638	[0.604,0.671]	0.7140	[0.614,0.815]
10^3	0.662	[0.629,0.695]	0.6431	[0.609,0.677]
10^4	0.641	[0.630,0.652]	0.6493	[0.639,0.660]
10^5	0.643	[0.640,0.646]	0.6513	[0.648,0.655]

Tabla 2.3. Estimación de Delta para una opción asiática por MC-DT.

Observemos que no vale la pena incrementar el tamaño de M si h queda fijo. El error que se comete al aproximar la integral por el esquema numérico (1.13) es de orden h , mientras que el error que se comete al usar Monte-Carlo es de orden $1/\sqrt{M}$. Entonces hay que seleccionar h y M tal que $h \approx \frac{1}{\sqrt{M}}$.

En este caso el estimador ya no es insesgado puesto que $E^*(\Delta - E(\hat{\Delta}^h)) \neq 0$. Pero este valor esperado tiende a cero cuando h tiende a cero por lo que el estimador es asintóticamente insesgado. El orden del error cuadrático medio de $\hat{\Delta}^h$ es más difícil de calcular que en los otros casos por lo que remitimos al lector a la literatura especializada, ver [6].

Por último, cabe señalar que la aproximación será mejor si se usa un esquema de mayor orden para aproximar la integral. Por ejemplo, el segundo esquema visto en el capítulo anterior.

3. Cálculo de algunas griegas por Monte-Carlo

Se puede utilizar el método de derivada trayectorial para estimar la sensibilidad del valor de la opción a cambios en los parámetros. A continuación se presenta el cálculo de algunas griegas para una opción call vainilla.

El cálculo de Vega, que mide la sensibilidad del precio de V a variaciones en la volatilidad, se reduce con el método de derivada trayectorial al siguiente cálculo

$$\text{Vega}_t = \frac{dV_t}{d\sigma} = E^* \left(\frac{dY}{dS_T} \frac{dS_T}{d\sigma} \right) = e^{-r(T-t)} E^* \left(\mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{dS_T}{d\sigma} \right).$$

$$\frac{dS_T}{d\sigma} = (\sqrt{T-t}z - \sigma(T-t))S_T,$$

con z el valor de una variable normal con media cero y varianza uno.

Al aplicar este método al cálculo de ρ , que mide la sensibilidad del precio a variaciones en la tasa de interés, y de Θ , que lo hace respecto al tiempo antes del vencimiento, se obtiene

$$\rho_t = \frac{dV_t}{dr} = E^* \left(\frac{dY_t}{dr} \right) = (T-t)e^{-r(T-t)} E^* \left(\mathbb{1}_{[S_T > K]} S_T - (S_T - K)_+ \right).$$

$$\Theta_t = \frac{dV_t}{dt} = E^* \left(\frac{dY_t}{dt} \right),$$

$$\frac{dY_t}{dt} = e^{-r(T-t)} \left(r(S_T - K)_+ + \mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{dS_T}{dt} \right).$$

$$\frac{dS_T}{dt} = - \left(\frac{\sigma z}{2\sqrt{T-t}} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) S_T,$$

con z el valor de una variable normal con media cero y varianza uno. Si en todos estos cálculos, el valor esperado es estimado por Monte-Carlo se obtendrá, en cada caso, un estimador insesgado con error cuadrático medio del orden $\frac{1}{M}$.

Desgraciadamente, este método no puede utilizarse para calcular la Γ , que es la variación de delta al cambio del precio en el subyacente, ya que eso implica el cálculo de la derivada de delta respecto a S_0 , lo que es igual a

$$\Gamma = \frac{d^2V}{dS_0^2} = e^{-rT} \frac{d}{dS_0} E^* \left(\mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{dS_T}{dS_0} \right).$$

La presencia de la función indicadora impide intercambiar el valor esperado con la derivada. En este caso o se aproxima por diferencias finitas o se usan otros métodos más sofisticados como la razón de máxima verosimilitud, ver [6].

A continuación se presentan los resultados numéricos que se obtienen al estimar Vega, ρ y Θ por Monte-Carlo combinado con el método de derivada trayectorial para la opción call europea vainilla con $K = 52$,

$S_0 = 50$, $T = 6$ meses, $r = 0.06$ y $\sigma = 0.12$. Al tiempo $t = 0$, el valor de *Vega* exacto es 14.07383, de $\rho = -14.130924$ y de $\Theta = .006851$.

	Vega	Intervalo	ρ	Intervalo	Θ	Intervalo
10^3	14.6430	[13.3999,15.8867]	-14.710	[-15.505,-13.915]	.0080	[-1071,1231]
10^5	14.1046	[13.9846,14.2246]	-14.095	[-14.175, -14.015]	-.0012	[-.0119,.0095]
10^7	14.0672	[14.0553,14.0792]	-14.127	[-14.135,-14.119]	.0072	[.0061,.0083]

Tabla 2.4. Estimación de *Vega*, ρ y Θ para una opción vainilla por MC-DT.

3.1. Cálculo de las griegas para la opción asiática. El método de derivada trayectorial combinado con Monte-Carlo nos permite aproximar el valor de las griegas de la opción asiática. Para ello, supongamos que la función de pago descontada al tiempo t de la opción asiática depende de un promedio aritmético que aproxima el valor promedio de S_t en el intervalo $[0, T]$; es decir es de la forma

$$Y_t = e^{-r(T-t)}(\bar{S} - K)_+,$$

con $\bar{S} = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i}$. El valor de la opción está dado por $V_t = E^*(Y_t)$ por lo que

$$Vega_t = \frac{dV_t}{d\sigma} = E^*\left(\frac{dY_t}{d\sigma}\right) = E^*\left(\frac{dY_t}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{d\sigma}\right).$$

$$Vega_t = e^{-r(T-t)} E^*\left(\mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{d\bar{S}}{d\sigma}\right),$$

y

$$\frac{d\bar{S}}{d\sigma} = \frac{h}{T\sigma} \sum_{i=1}^N [z_i \sqrt{t_i} - \sigma t_i] S_{t_i},$$

con z_i el valor de una variable normal con media cero y varianza uno.

$$\rho_t = \frac{dV_t}{dr} = E^*\left(\frac{dY_t}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dr}\right) = e^{-r(T-t)} E^*\left(\mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{d\bar{S}}{dr} - (T-t)Y_t\right),$$

con

$$\frac{d\bar{S}}{dr} = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N t_i S_{t_i}.$$

$$\Theta_t = \frac{dV_t}{dt} = E^*\left(\frac{dY_t}{dt}\right),$$

$$\frac{dY_t}{dt} = re^{-r(T-t)} \left[\mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{d\bar{S}}{dt} + (\bar{S} - K)_+ \right]$$

y

$$\frac{d\bar{S}_t}{dt} = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i} \left[(r - \sigma^2/2) + \frac{1}{2\sqrt{t_i}} \sigma z_i \right],$$

con z_i el valor de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno.

Por último, se presenta para la opción call asiática europea que se utilizó en la sección 2.3, el cálculo de las griegas Vega, ρ y θ . Los datos son: precio inicial, $S_0 = 100$, precio de ejercicio $K = 100$, tasa libre de riesgo $r = 0.10$, volatilidad $\sigma = 0.20$ y $T = 1$ año. Para aproximar la integral se escogió $h = .01$.

M	Vega	longitud	ρ	longitud	Θ	longitud
10^3	[17.32,23.08]	5.76	[26.82, 29.61]	2.80	[10.85, 12.61]	1.75
10^5	[19.06,19.62]	.56	[27.36, 27.64]	.28	[11.13, 11.31]	.17
10^7	[19.24,19.30]	.06	[27.52, 27.55]	.03	[11.22, 11.23]	.02

Tabla 2.5. Estimación de Vega, ρ y Θ para una opción asiática por MC-DT.

Simulación

1. Generadores de números aleatorios

Una forma de generar números aleatorios es lanzar una moneda al aire, tirar un dado o sacar una carta de una baraja o dando de vueltas a un disco, que tenga inscritos a lo largo de la circunferencia números, y que se mueva por medio de una fuerza mecánica no determinista. Estos procedimientos son útiles siempre que se desee generar un número pequeño de números aleatorios, pero si se desea generar miles de ellos se requieren procedimientos que puedan hacer uso de las computadoras. Un ejemplo que ilustra las limitaciones de estos procedimientos lo dio la empresa *Rand* que en 1955 publicó una tabla de un millón de números aleatorios. En un principio fue un éxito, pero pronto mostró sus limitaciones para ciertos cálculos, en los que se requiere miles y miles de números aleatorios, como por ejemplo en aplicaciones del método de Monte-Carlo en dinámica molecular.

El primer algoritmo computacional para generar números aleatorios fue el algoritmo de cuadrados medios de Von Neumann que fue publicado a fines de los años cuarenta. El algoritmo consiste en lo siguiente: dado un número entero positivo de N dígitos X_0 , con N par, tomar s números, con $s < N/2$, a la izquierda del dígito $d_{N/2}$ incluyendo a este dígito y s números a su derecha. Respetando el orden, con estos dígitos se forma un nuevo número que se eleva al cuadrado y cuyo resultado se indica como X_1 ; si denominamos como $U_1 = .X_1$ entonces U_1 es el primer número pseudo-aleatorio uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Se repite el proceso a X_1 para generar X_2 y obtener a su vez $U_2 = .X_2$, y así sucesivamente. De esta forma se generan n números en $(0, 1)$ que ya no son propiamente aleatorios pues no son producto del azar.

Ilustremos con un ejemplo este algoritmo. Consideremos que $N = 6$, $s = 2$ y $x_0 = 256874$. Los dígitos que se seleccionan son 5687, que elevados al cuadrado nos dan el siguiente elemento de la sucesión $x_1 = 32341969$ que da lugar a $U_1 = .32341969$. De esta forma se obtienen $x_2 = (3419)^2$, $U_2 = .11689561$, $x_3 = (6895)^2$ y $U_3 = .47541025$ y así sucesivamente.

A sucesiones de números obtenidos por algoritmos deterministas cuya complejidad nos impide predecir de antemano cuál es el valor de su k -ésimo elemento se les llama números pseudo-aleatorios.

Los algoritmos para generar números pseudo-aleatorios en el intervalo $(0, 1)$ deben tener buenas propiedades estadísticas, entre éstas:

1. Los números deben distribuirse uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.
2. No deben estar correlacionados entre sí.
3. Deben permitirnos generar un gran número de ellos sin que se comiencen a repetir.

El algoritmo de Von-Neumann no tiene buenas propiedades estadísticas y a veces sólo se pueden generar sucesiones pequeñas como cuando los dígitos que se seleccionan para generar un nuevo número son todos cero.

La mayoría de los algoritmos que se utilizan hoy en día para generar números pseudo-aleatorios con distribución uniforme se basan en congruencias lineales. El primero en introducirlos fue Lehmer en 1951 y la idea es la siguiente: dados a , c y m enteros positivos generar X_i , para $i = 1, \dots, n$, por medio del siguiente procedimiento:

1. Dada Z_0 aleatoria.
2. $Z_{i+1} = (aZ_i + c) \bmod(m)$.
3. $X_{i+1} = Z_{i+1}/m$.

O sea Z_{i+1} es el residuo que se obtiene al dividir a $aZ_i + c$ entre m . Claramente $Z_{i+1} < m$ por lo tanto $X_{i+1} \in [0, 1)$. A Z_0 se le llama la semilla.

Ejemplo

Sea $c = 7$, $a = 1$, $m = 11$ y $Z_0 = 3$. Entonces

i	Z_i	X_i
1	10	0.909090909
2	6	0.545454545
3	2	0.181818182
4	9	0.818181818
5	5	0.454545455
6	1	0.090909091
7	8	0.727272727
8	4	0.363636364
9	0	0
10	7	0.636363636
11	3	0.272727273
12	10	0.909090909

Como se observa esta congruencia genera al menos 11 números antes de comenzar a repetirlos. De hecho genera todos los posibles residuos.

A esto se le llama el ciclo de la congruencia. Si se seleccionan bien los números a , c y m el algoritmo tiene ciclo máximo o sea igual a m .

Para computadoras de 32 bits (4 bytes), se ha observado que una buena selección de m es $m = 2^{31} - 1$, $a = 7^5 = 16,807$ y $c = 0$.

No basta con buscar generadores que tengan ciclo máximo también deseamos que se distribuyan uniformemente, que no estén correlacionados, que sean fáciles de generar y almacenar y que puedan replicarse. Es decir que si se conoce la semilla se replique la sucesión.

Otro ejemplo de un buen generador de números pseudo-aleatorios uniformes es el de Kobayashi que está dado por

$$Z_i = (314159269Z_{i-1} + 453806245) \bmod (2^{31}).$$

La búsqueda de mejores generadores de números aleatorios sigue abierta a la investigación. Para aprender más sobre este tema ver [6] y [16]. Recientemente han aparecido sucesiones deterministas que tienen el mismo comportamiento que realizaciones de variables aleatorias con distribución uniforme y que tienen la característica de tener baja discrepancia. Su uso ha dado lugar a nuevos mtodos que se conocen con el nombre de mtodos cuasi Monte-carlo. Para saber más de ello, consultar la sección final del anexo B.

2. Pruebas para validar generadores de números aleatorios

Se recomienda que antes de usar el generador de números aleatorios de cualquier paquete de software, se valide éste aplicando una serie de pruebas estadísticas y empíricas. Entre las estadísticas están:

1. Hacer un histograma con los números aleatorios y comprobar gráficamente que se distribuyen uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.
2. Prueba de bondad de ajuste para probar la hipótesis que los números pseudo-aleatorios se distribuyen uniformes. La prueba consiste en lo siguiente:
 - (a) Se divide el intervalo $[0, 1]$ en k subintervalos de longitud $\frac{1}{k}$, (al menos $k = 100$.)
 - (b) Se generan n variables pseudo-aleatorias $U_i, i = 1, \dots, n$. Se cuentan cuántas observaciones de U_i caen en el subintervalo j ; sea $f_j =$ número de ellas que están en el intervalo $[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k})$ para $j = 1, \dots, k$.
 - (c) Sea $\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{j=1}^k (f_j - \frac{n}{k})^2$.
 - (d) Para n suficientemente grande χ^2 tiene una distribución χ^2 con $k - 1$ grados de libertad.
 - (e) Si $\chi^2 > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$ se rechaza la hipótesis de que las U_i sean uniformes en $(0, 1)$ con un nivel de confianza α .

Observación: Estas pruebas no son adecuadas para valores de n pequeños o muy grandes ya que se rechazará la hipótesis por la más leve diferencia.

3. Verificar si (U_i, U_{i+1}) son variables aleatorias independientes que se distribuyen uniformemente en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. La prueba consiste en lo siguiente:
 - (a) Se generan n observaciones (u_i, u_j) de variables pseudo-aleatorias uniformes en $[0, 1]$.
 - (b) Dividir el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en n^2 rectángulos de longitud J_1 y ancho J_2 .
 - (c) Sea f_{j_1, j_2} = Número de (u_i, u_j) tal que $u_i \in J_1$ y $u_j \in J_2$.
 - (d)

$$\chi^2 = \frac{k^2}{n} \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=1}^k (f_{j_1 j_2} - \frac{n}{k^2})^2$$

- (e) Si $\chi^2 > \chi_{k^2-1, 1-\alpha}^2$ se rechaza la hipótesis nula.

Entre las empíricas está una para probar independencia, conocida como prueba de corridas.

1. Dadas n observaciones de números pseudo-aleatorios uniformes u_i , $i = 1, \dots, n$ se van contando el número de u_i que satisfacen que $u_i < u_{i+1}$. A cada una de las sucesiones que satisfacen lo anterior se le llama corrida. Al término de la construcción de las corridas se clasifican por su número de elementos. Sea r_i = Núm. de corridas de longitud i con $i = 1, \dots, 5, 6$ definidas por

$$r_i = \begin{cases} \text{número de corridas de longitud } i, & i = 1, \dots, 5 \\ \text{número de corridas de longitud } \geq 6 & i = 6. \end{cases}$$

2. Se construye un estadístico

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 a_{ij} (r_i - nb_i)(r_j - nb_j),$$

con el elemento a_{ij} de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4529.4 & 9044.9 & 13568 & 18091 & 22615 & 27892 \\ 9044.9 & 18097 & 27139 & 36187 & 45234 & 55789 \\ 13568 & 27139 & 40721 & 54281 & 67852 & 83685 \\ 18091 & 36187 & 54281 & 72414 & 90470 & 111580 \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & 139476 \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{bmatrix}$$

y las b_i son los elementos del vector $b = (\frac{1}{6}, \frac{5}{24}, \frac{11}{120}, \frac{19}{720}, \frac{29}{5040}, \frac{1}{840})$. Estas constantes aparecen calculadas en el libro de Knuth, ver [13].

3. Para n grande, se recomienda $n \geq 4000$, R se aproxima a una χ^2 con 6 grados de libertad.
4. Si $R > \chi_6^2$ se rechaza la hipótesis.

Más pruebas de este tipo se pueden encontrar en los libros de [16] y [13].

3. Generación de observaciones de variables aleatorias

Se pueden generar observaciones de variables aleatorias que tengan una distribución discreta o continua a partir de observaciones de variables aleatorias uniformes. En el caso de generarlos por computadora se usan los números pseudo-aleatorios uniformes. En estas notas presentaremos los procedimientos para el caso de la distribución Bernoulli, exponencial y normal, que son las distribuciones más usadas en finanzas, sin hacer diferencia si se hacen o no por computadora.

1. Para generar observaciones de variables aleatorias Bernoulli X_i que toman el valor x_1 con probabilidad p y x_2 con probabilidad $1 - p$, se aplica el siguiente algoritmo:
 - (a) Se genera una observación de una v.a. uniforme, u_i , en $[0, 1]$.
 - (b) Si $u_i \leq p \Rightarrow X_i = x_1$.
 - (c) Si $u_i > p \Rightarrow X_i = x_2$.
2. Si la variable aleatoria X_i toma los valores x_1, x_2, \dots, x_n con probabilidad p_1, \dots, p_n se hace lo siguiente:
 - (a) Se genera una observación u_i de una v.a. uniforme en $[0, 1]$.
 - (b)

$$X_i = \begin{cases} x_1, & 0 \leq u_i \leq p_1 \\ x_2 & p_1 < u_i \leq p_1 + p_2, \\ x_3 & p_1 + p_2 < u_i \leq \sum_{j=1}^3 p_j, \\ \dots & \\ x_n & \sum_{j=1}^{n-1} p_j < u_i. \end{cases}$$

3. En el caso de las variables continuas se utiliza un método general que es el método inverso que se puede aplicar siempre que F sea una distribución estrictamente creciente. Sea U una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$, para cualquier distribución F la variable aleatoria definida por $\chi = F^{-1}(U)$ tiene distribución F .

Por ejemplo sea X la variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro μ . Su distribución está dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad \text{si } x \geq 0.$$

Si $F(x) = y$ entonces $y \in (0, 1)$ y $1 - e^{-\mu x} = y$. Despejando x se obtiene que los valores que toma una variable aleatoria exponencial se pueden construir a partir de la siguiente expresión: $X = \frac{-1}{\mu} \ln(1 - U)$ con U una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$.

Nótese que si U toma valores en $(0, 1)$ también lo hace $1 - U$ por lo que el algoritmo para generar observaciones de variables aleatorias con distribución exponencial con parámetro μ queda de la siguiente forma:

- (a) Se genera una observación u de una variable aleatoria uniforme en $(0, 1)$.
 - (b) $\chi = \frac{-1}{\mu} \ln(u)$ es una observación de una variable aleatoria exponencial de parámetro μ .
4. El método inverso se puede aplicar para generar observaciones de variables aleatorias con distribución normal. Otro método es el siguiente: sean $(X, Y) \sim N(0, 1)$ variables aleatorias independientes, entonces la función de densidad conjunta se define

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Si estas dos variables se llevan al plano (R, Θ) a través del cambio de coordenadas polares $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $\Theta = \text{Tang}^{-1}(\frac{Y}{X})$ si $(X, Y) \neq (0, 0)$ y al origen lo manda al origen. La pregunta es si (X, Y) son variables aleatorias normales independientes, entonces ¿Cuál es la distribución de (R, Θ) ? $g(R^2, \Theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} e^{-R^2/2}$ con R^2 variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 1/2$ y Θ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Algoritmo de Box-Muller

1. Se genera dos observaciones u_1, u_2 de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0, 1)$.
2. Sea $r^2 = -2 \ln(u_1)$, $\theta = 2\pi u_2$.
3. Entonces

$$x = r \cos \theta = \sqrt{-2 \ln(u_1)} \cos(2\pi u_2)$$

$$y = r \sin \theta = \sqrt{-2 \ln(u_1)} \sin(2\pi u_2)$$

son observaciones de variables aleatorias independientes con distribución normal.

4. Simulación de una caminata aleatoria

Considérese el siguiente juego: Se tiene un jugador que se coloca en el origen de un plano cartesiano. Se tira una moneda, si sale sol avanza hacia la posición $(1, 1)$, si cae águila avanza hacia $(1, -1)$. Si denotamos por x_i = número de la i -ésima jugada, a la siguiente tirada si sale sol avanza hacia la posición $(x_i, \text{posición anterior} + 1)$, si sale águila se mueve a la posición $(x_i, \text{posición anterior} - 1)$ y así sucesivamente. Después de n tiradas, gana quien tenga la coordenada y más grande.

Simúlese este juego por computadora. Denótese por S_j^i = la coordenada y de la posición del jugador i en la tirada j . Claramente el resultado de cada moneda es independiente y se puede representar como una variable aleatoria con distribución Bernoulli. Esta variable toma el valor sol con probabilidad de un medio y el de águila con las misma probabilidad, para que el juego sea justo.

La sucesión S_j^i para el jugador i forma una sucesión de variables aleatorias que se conoce con el nombre de caminata aleatoria y describe el comportamiento de muchos problemas de aplicación.

Algoritmo para generar una caminata aleatoria.

1. Inicialice $S_0^i = 0$.
2. Para cada tirada j desde $j = 1, \dots, M$ se genera una observación de una variable aleatoria Bernoulli a través de una uniforme. Sea u_j una observación de una variable aleatoria uniforme U_j en el intervalo $(0, 1)$. Definamos el valor de X_j a partir de

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } u_j > 1/2, \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. Entonces $S_{j+1}^i = S_j^i + X_j$.

Si se unen todas las posiciones del jugador por medio de líneas rectas se tiene una posible trayectoria que puede seguir el jugador i . El número de distintas trayectorias que puede seguir es 2^M .

Obsérvese que $E(X_j) = 0$ y que $Var(X_j) = 1$. La probabilidad de que el jugador i esté en la n -tirada en la ordenada $y = n$ es $1/(2)^n$.

$$E(S_M^i) = E\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M E(X_i) = 0.$$

$$Var(S_M^i) = Var\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M Var(X_i) = M.$$

Si M es lo suficientemente grande se aplica el teorema del límite central que afirma que

$$Z_M = \frac{S_M - E(S_M)}{\sqrt{Var(S_M)}} = \frac{S_M}{\sqrt{M}} \sim N(0, 1).$$

Por lo tanto, para M grande S_M se comporta como una normal.

4.1. Simulación de un movimiento browniano. El movimiento browniano estándar es un proceso estocástico continuo que satisface:

1. $W(0) = 0$.
2. $E(W(t)) = 0$ y los incrementos $W(t) - W(s)$ con $t \geq s$ son variables aleatorias normales independientes con media cero y varianza $t - s$.

Hay muchas formas de generar un proceso browniano. Numéricamente entre los más conocidos están por medio de una caminata aleatoria o por medio de variables aleatorias normales independientes. En ambos casos para aproximar el proceso browniano hay que discretizar primero el tiempo.

Dado un intervalo $[0, T]$, sea $N \in \mathcal{N}$ y sea $h = T/N$. Definamos los puntos $t_0 = 0$, $t_i = ih$ y $t_N = T$. Asociada a esta partición del intervalo $[0, T]$ en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ se puede simular el proceso browniano estándar por medio de una caminata aleatoria observando que éste se puede obtener como el límite de una caminata aleatoria definida por $S_0 = 0$ y

$$S_t = \sqrt{\Delta t}(X_1 + X_2 + \dots + X_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor}),$$

cuando Δt tiende a cero.

Algoritmo para generar un proceso browniano por medio de una caminata aleatoria.

1. Dados $t_0 = 0$, $t_i = ih$ y $t_N = T$; $W_0 = 0$.
2. Para $i = 1, \dots, N$, se genera una variable aleatoria tipo Bernoulli X_i y se calcula $W_i = W_{i-1} + X_i\sqrt{h}$.
3. Para construir una función lineal por pedazos \hat{W} que interpole a ésta se define

$$\hat{W}(t) = W_j + \frac{W_{j+1} - W_j}{h}(t - t_j) \quad \text{para } t \in (t_j, t_{j+1}).$$

En la siguiente figura se muestra la simulación de un browniano por medio de una caminata aleatoria con $\Delta t = .001$.

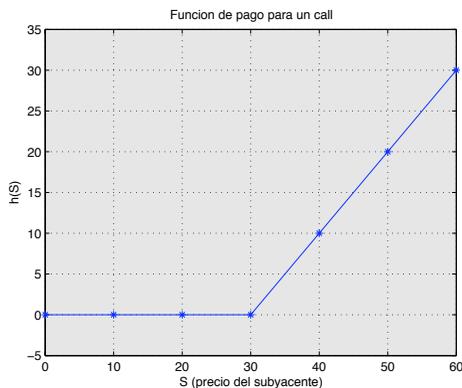


Figure A.1. Simulación de una trayectoria del movimiento browniano para $\Delta t = .001$

Algoritmo para generar un proceso browniano por medio de gaussianas. En este caso se utiliza el hecho que incrementos de brownianos son variables independientes que se distribuyen en forma normal con media cero y varianza $t - s$.

1. Dado $h = T/N$ se define $t_0 = 0$, $t_i = ih$ y $t_N = T$; sea $W_0 = 0$.
2. Para $i = 1, \dots, N$ se genera una variable aleatoria $Y_i \sim N(0, 1)$ y se calcula $W_i = W_{i-1} + Y_i \sqrt{\Delta t}$.
3. Una aproximación continua \hat{W} de W está dada por

$$\hat{W}(t) = W_j + \frac{W_{j+1} - W_j}{h}(t - t_j) \quad \text{para } t \in (t_j, t_{j+1}).$$

4.2. Aproximación de la solución de un proceso estocástico.

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t \quad \text{con } X(t_0) = X_0.$$

donde a, b son funciones continuas respecto a t y a X_t . Otra forma de expresar esta ecuación es en forma integral

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s.$$

La primera integral es una integral de Riemann, pero la segunda es una integral estocástica, ver [22].

Ejemplo

Movimiento browniano geométrico

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X(0) = X^*.$$

Esta ecuación tiene solución exacta

$$X(t) = X^* e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

La aproximación numérica implica, como en el caso del proceso browniano, discretizar la ecuación. Para ello, se discretiza primero el tiempo: dado un intervalo $[0, T]$, sea $N \in \mathcal{N}$ y sea $h = T/N$. Defínense los puntos $t_0 = 0$, $t_i = ih$, para $i = 1, \dots, N-1$, y $t_N = T$. Asociada a esta discretización, denótese por $X_i \doteq X(t_i)$. El segundo paso es discretizar la ecuación diferencial estocástica por medio de algún esquema numérico. El esquema más sencillo es el de Euler que al aplicarlo al movimiento browniano geométrico toma la forma

$$dX_i \approx X_{i+1} - X_i = \mu X_i h + \sigma X_i (W_{i+1} - W_i) \quad (\text{A.1})$$

y se usa el hecho que $W_{i+1} - W_i = Y_i \sqrt{h}$, con $Y_i \sim N(0, 1)$.

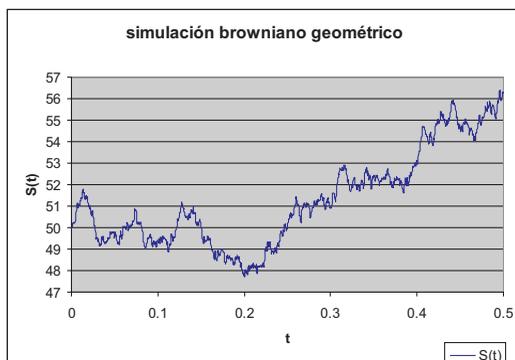


Figure A.2. Simulación de una trayectoria del proceso browniano geométrico para $\Delta t = .001$

Algoritmo de Euler para EDE. En este caso se utiliza el algoritmo anterior para simular brownianos por medio de gaussianas.

1. Dados $t_0 = 0$, $t_i = ih$, para $i = 1, \dots, N$, y $X_0^h = X^*$.
2. Para $i = 1, \dots, N$ se genera una variable aleatoria $Y_i \sim N(0, 1)$ y se calcula $X_i^h = X_{i-1}^h + \mu X_{i-1}^h h + \sigma X_{i-1}^h Y_i \sqrt{h}$.
3. Para definir una función continua a partir de ésta se unen los valores X_i^h por medio de rectas, es decir se define

$$X^h(t) = X_i^h + \frac{X_{i+1}^h - X_i^h}{h}(t - t_i) \quad \text{para } t \in (t_i, t_{i+1}).$$

Al discretizar una ecuación diferencial estocástica se introduce un error. Este error es distinto dependiendo de la norma que se escoja. Para fines del cálculo del valor esperado de una función g continua en S_T el error es de orden h . Es decir existe una constante $C > 0$ tal que

$$|E(g(X_T)) - E(g(X_T^h))| \leq Ch.$$

En el caso que nos interese aproximar a la trayectoria en los puntos t_i entonces

$$E(\max_{1 \leq i \leq N} |X_{t_i} - X_{t_i}^h|) \leq C\sqrt{h}.$$

Hay otros métodos mas precisos, o sea de orden más alto, para aproximar la solución de una EDE, se sugiere para ello consultar [12].

Integración numérica por Monte-Carlo

Sea X una variable aleatoria continua que toma valores en los reales con función de densidad igual a $f(x)$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y cero en su complemento en los reales. La probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor menor o igual a $a \in [\alpha, \beta]$ está dado por

$$P[X \leq a] = \int_{\alpha}^a f(x) dx.$$

La probabilidad es el área bajo la curva $y = f(x)$ del punto α al punto a .

La esperanza y de la varianza de esta variable aleatoria X están dados por

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx, \quad Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - E[X]^2.$$

De igual forma se puede definir la esperanza de un función continua g de la variable aleatoria X como

$$E[g(X)] = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)f(x) dx.$$

Con frecuencia no es posible aplicar un método de integración para calcular en forma exacta la integral. En ese caso hay que aproximar la integral por medio de un método de integración numérica como el método del trapecio, de Simpson o Monte-Carlo.

1. Integración numérica

Los métodos de integración de Newton-Cotes se obtienen al integrar polinomios de grado n que interpolan la función a integrar en el intervalo de integración. Por ejemplo, supongamos que nos interesa calcular $F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-s^2/2} ds$. Esta integral no puede calcularse por medio de un método de integración por lo que una forma de aproximarla es por medio de la integral del polinomio lineal que interpola a $e^{-s^2/2}$ en el intervalo $[0, x]$.

Sea $f(x) : [a, b] \rightarrow R$ una función acotada en $[a, b]$ entonces la integral de f se puede aproximar integrando un polinomio constante, lineal o cuadrático que interpole a f en $[a, b]$.

1. La fórmula el rectángulo se obtiene al interpolar a $f(x)$ por medio del polinomio constante $p_0(x) = f(\frac{a+b}{2})$.

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = R(f).$$

2. La fórmula del trapecio se obtiene al interpolar a f por medio de un polinomio lineal $p_1(x) = \alpha x + \beta$ que satisfaga $f(a) = p_1(a)$, y $f(b) = p_1(b)$. Determinar el polinomio lineal es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones lineales para α y β cuya solución es

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \beta = \frac{f(b)a - f(a)b}{b-a}.$$

Al integrar $p_1(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se obtiene la regla del trapecio con $h = b - a$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_1(x) dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = T(f).$$

El error está dado por

$$\int_a^b f(x) dx - T(f) = -\frac{h^3}{12}(f''(\eta)), \quad a < \eta < b.$$

3. Por último al integrar el polinomio cuadrático que interpola a f en $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$, y $x = b$ se obtiene la regla de Simpson con $h = \frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_2(x) dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + f(b)) = S(f).$$

El error que se comete al usar Simpson es

$$\int_a^b f(x) dx - S(f) = \frac{-h^5}{90}(f^{(4)}(\eta)), \quad a < \eta < b.$$

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x^3$, $\int_0^1 x^3 dx = 0.25$; $R(f) = 0.125$, $T(f) = 0.5$, y $S(f) = 0.25$. En este caso Simpson es exacta ya que integra en forma exacta a polinomios de grado menor o igual a 3.
2. Sea $f(x) = e^{-x^2/2}$ estimar $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$. $R(f) = 0.882497$, $T(f) = 0.803265$ y $S(f) = 0.856086$.

1.1. Método de Monte-Carlo para el cálculo de integrales.

En el caso que nos ocupa, se desea estimar la integral de una función G continua. Esta integral puede verse como el cálculo del valor esperado de la función G cuando se aplica a una variable aleatoria con distribución uniforme. Supongamos que el intervalo de integración es $[0, 1]$ y sea X_1, X_2 hasta X_M una muestra de variables aleatorias, independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$, entonces

$$\int_0^1 G(x) dx = E(G(X))$$

con X una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$.

De esta forma, con base en la Ley de los Grandes Números, esta integral se puede aproximar por

$$\int_0^1 G(x) dx \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(x_i).$$

Todo el problema se reduce a generar la muestra. Por otro lado, obsérvese que cualquier integral sobre el intervalo $[a, b]$ se puede transformar a una integral sobre el intervalo $[0, 1]$ con el siguiente cambio de variable $x = a + (b - a)u$, entonces

$$\int_a^b G(x) dx = (b - a) \int_0^1 G(a + (b - a)u) du \approx \frac{b - a}{M} \sum_{i=1}^M G(a + (b - a)u_i),$$

con u_i variables aleatorias uniformes en el intervalo $[0, 1]$.

Algoritmo de Monte-Carlo. El algoritmo de Monte-Carlo para estimar un intervalo de confianza del 95% de la esperanza de una función $F(X)$, con X una variable aleatoria uniforme estándar es el siguiente:

1. Denotemos por \tilde{I}_i y Var_i a la media aritmética acumulada hasta la iteración i , y a la varianza acumulada, respectivamente.
2. Sea $Var_1 = 0$; $\tilde{I}_0 = 0$; sea U_1 una uniforme en $(0, 1)$ y $\tilde{I}_1 = F(U_1)$.
3. Para $i = 2, \dots, M$ hacer los siguientes pasos:
 - (a) Generar un número aleatorio U_i uniforme.
 - (b) $\tilde{I}_i = \tilde{I}_{i-1} + \frac{F(U_i) - \tilde{I}_{i-1}}{i}$; $Var_i = (1 - \frac{1}{i-1})Var_{i-1} + i(\tilde{I}_i - \tilde{I}_{i-1})^2$.
4. $I \in \left[\tilde{I}_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \tilde{I}_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right]$.

Ejemplo

Usemos lo anterior para aproximar el valor de

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2.5}^{2.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Transformemos primero la integral al intervalo $[0, 1]$

$$I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{(2.5u)^2}{2}} du$$

$$\approx \frac{5}{M\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^M e^{-\frac{(2.5u_i)^2}{2}} = 1.0066 \quad \text{para } M = 100.$$

El resultado no es bueno si comparamos con el valor que se obtiene al usar las tablas de la normal acumulada que es igual a 0.987580. Con el método del trapecio, que requiere únicamente de dos evaluaciones de la función, se obtiene el valor de 1.041 y con Simpson 0.955889. ¿Cómo se relaciona el error que cometemos con el tamaño de M de la muestra?

A continuación se presentan algunos resultados numéricos para distintos valores de M .

M	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
10	0.939866	1.158364	1.376862	0.436997
100	0.939874	1.006611	1.073348	0.133474
1000	0.955516	0.976122	0.996730	0.041214
10000	0.981765	0.988231	0.994697	0.012932
100000	0.986738	0.988788	0.990838	0.004100

Tabla B.1. Aproximaciones mediante el método Monte-Carlo a la integral.

Por lo que con 100000 evaluaciones de la función se obtiene una aproximación con dos cifras significativas. Es un hecho que Monte-Carlo converge lentamente por lo que no puede competir con Simpson o Trapecio para el cálculo de integrales en una variable, pero para el cálculo de integrales múltiples este método o variaciones de éste se vuelven muy competitivos e inclusive mejores que cualquier otro método de integración numérica.

2. Integración múltiple

En la sección anterior se analizó como evaluar integrales con dominio en un intervalo real. Ahora bien, si el dominio es una región de R^2 , en la que las fronteras izquierda y derecha sean segmentos de rectas verticales, ($x = a$ y $x = b$) y la frontera inferior y superior estén dadas por las curvas $y = l(x)$ y $y = s(x)$, respectivamente y $l(x) < s(x)$, $x \in (a, b)$. La

integral doble en ese dominio es:

$$\int_a^b \int_{l(x)}^{s(x)} f(x, y) dy dx. \quad (\text{B.1})$$

Si bien, los problemas de integrales dobles no siempre aparecen en la forma (B.1), se supondrá que el problema se pudo reescribir en la forma anterior, en donde quizá sea necesario intercambiar x y y .

El problema de calcular la integral se resolverá convirtiéndolo al cálculo de integrales unidimensionales. Para esto, se define

$$J(x) \equiv \int_{l(x)}^{s(x)} f(x, y) dy, \quad (\text{B.2})$$

así que (B.1) se puede escribir como

$$I(x) = \int_a^b J(x) dx. \quad (\text{B.3})$$

Se puede obtener una aproximación numérica para (B.3) aplicando cualquiera de las fórmulas de integración numérica analizadas en la sección anterior, lo cual se puede expresar como

$$I(x) \approx \sum_{i=0}^n w_i J(x_i). \quad (\text{B.4})$$

Aquí, las w_i son los pesos y las x_i los puntos de la fórmula de integración que se utilice. Ahora bien, para $x = x_i$ la ecuación (B.2) queda

$$J(x_i) \equiv \int_{l(x_i)}^{s(x_i)} f(x_i, y) dy. \quad (\text{B.5})$$

El anterior es un problema unidimensional y se puede evaluar mediante alguna de las fórmulas de integración numérica.

Ejemplo

Utilice la regla de Simpson para estimar el valor de la siguiente integral

$$I = \int_1^2 \int_{x-1}^{x^2} \sqrt{x+y} dy dx.$$

En este caso, $a = 1$, $b = 2$, $l(x) = x - 1$ y $s(x) = x^2$.

Aplicando el procedimiento descrito, y mediante la regla de Simpson, la integral anterior se puede aproximar por

$$I \approx \frac{h_x}{3} (H(x_0) + 4H(x_1) + H(x_2)),$$

en donde,

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 2,$$

además, $h_x = \frac{b-a}{2} = 0.5$ y cada $H(x_i)$ está dada por

$$H(x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i^2} \sqrt{x_i + y} \, dy.$$

Por lo que, la aproximación de I está dada por:

$$I \approx \frac{h_x}{3} \left[\int_{1-1}^{1^2} \sqrt{1+y} \, dy + 4 \int_{1.5-1}^{1.5^2} \sqrt{1.5+y} \, dy + \int_{2-1}^{2^2} \sqrt{2+y} \, dy \right],$$

Al aplicar la regla de Simpson para la primera integral se tiene,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+y} \, dy &\approx \frac{0.5}{3} [\sqrt{1+0} + 4\sqrt{1+0.5} + \sqrt{1+1}], \\ &\approx 1.218865508. \end{aligned}$$

De forma análoga, para las otras integrales se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^{2.25} \sqrt{1.5+y} \, dy &\approx 2.955468605, \\ \int_1^4 \sqrt{2+y} \, dy &\approx 6.333410962. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación final de la integral es

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{0.5}{3} [1.218865508 + 4(2.955468605) + 6.333410962], \\ &= 3.229025149. \end{aligned}$$

De una forma similar se pueden calcular integrales múltiples. Pero, entre mayor sea la dimensión, mayor será el número de puntos en donde se debe evaluar la función. Así por ejemplo, considérese una región de integración rectangular, si en cada eje se subdivide el intervalo correspondiente en n subintervalos, entonces, para el caso de la fórmula extendida de Simpson se tendrán $(n+1)^2$ puntos de R^2 en donde se debe evaluar la función $f(x, y)$. De aquí, es claro que si integramos una función $g: R^m \rightarrow R$, cuyo dominio es un *rectángulo* de R^m y en cada dirección se toman n subintervalos, el número de puntos en donde se debe evaluar la función g es de orden n^m . Este valor crece rápidamente por lo que una alternativa útil para aproximar integrales de dimensiones altas es el método de Monte Carlo.

Al igual que en el caso de una dimensión, supóngase que se está interesado en calcular

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

Como se comentó en la sección (1.1), I se puede expresar mediante la esperanza siguiente:

$$I = E[g(U_1, U_2, \dots, U_m)],$$

en donde U_1, U_2, \dots, U_m son variables aleatorias independientes, que se distribuyen de manera uniforme en $(0, 1)$.

Ahora, si se toman n conjuntos independientes, cada uno de ellos con m variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0, 1)$, se tiene que

$$(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i), \quad i = 1, \dots, n$$

entonces, ya que las variables aleatorias

$$g(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i), \quad i = 1, \dots, n,$$

son independientes e idénticamente distribuidas con media I , podemos utilizar nuevamente la ley fuerte de los grandes números para estimar I mediante la media aritmética $\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i)$.

Con base en lo anterior, se debe observar que el algoritmo para aproximar la integral y determinar los intervalos de confianza, es el mismo al que se dio en el caso unidimensional. Nótese que, si σ es la desviación estándar de $g(U_1, U_2, \dots, U_m)$ entonces se tiene que $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar de \hat{I}_n , por lo que

$$P\left(\left|I - \hat{I}_n\right| < \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P(|Z_n| < c) = 2\Phi(c),$$

con $Z_n = \frac{(I - \hat{I}_n)}{\sigma/\sqrt{n}}$, $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-x^2/2} dx$ y c se selecciona dependiendo de la probabilidad que se desee obtener. Por ejemplo, si se quiere que la probabilidad sea 0.95 se selecciona a c como 1.96.

Ejemplo

Aproxime el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} dy dx.$$

Al usar el algoritmo que se dio para una dimensión se generó la tabla siguiente, los intervalos son al 95% de confianza. El valor verdadero con 5 decimales de precisión es 4.89916.

Ejemplo

Aproxime el valor de la integral

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 2^{-7} \left(\sum_{i=1}^8 x_i\right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_8.$$

M	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
100	3.72101	4.73637	5.75174	2.03072
1000	4.03326	4.33065	4.62804	0.59478
10000	4.68907	4.80356	4.91804	0.22897
100000	4.86826	4.90544	4.94262	0.07436
1000000	4.88963	4.90131	4.91299	0.02336
10000000	4.89526	4.89895	4.90264	0.00738
100000000	4.89794	4.89911	4.90028	0.00233

Tabla B.2. Aproximaciones mediante Monte-Carlo a la integral doble.

Al aplicar el algoritmo que se dio para una dimensión se generó la tabla siguiente, los intervalos son al 95% y los resultados están redondeados a 6 decimales.

M	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
100	0.118581	0.128523	0.138465	0.019884
1000	0.126927	0.130067	0.133207	0.006280
10000	0.129007	0.129999	0.130991	0.001984
100000	0.129975	0.130295	0.130616	0.000641
1000000	0.130027	0.130128	0.130229	0.000202
10000000	0.130173	0.130205	0.130237	0.000064

Tabla B.3. Aproximaciones mediante Monte-Carlo a la integral múltiple.

El valor verdadero es $\frac{25}{192}$, el cual con 6 decimales de precisión es 0.130208. En la tabla claramente se puede observar el patrón del orden de convergencia, característico del método Monte Carlo.

3. Integración numérica por Cuasi Monte-Carlo

En el apéndice anterior se analizaron métodos de integración numérica determinista y por el método Monte-Carlo. Para simplificar la exposición y sin pérdida de generalidad, se supondrá que el intervalo de integración es $I = [0, 1]$. Así, los dos enfoques de integración se pueden enunciar de la manera siguiente.

Sea $C = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq I$, entonces una aproximación a la integral de la función f está dada por

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^m w_k f(x_k).$$

Si tomamos $w_k = \frac{1}{m}$ y $x_k = \frac{k}{m}, k = 1, \dots, m$ se tiene el método del rectángulo. Con las mismas w_k , pero ahora tomando los puntos x_k como números pseudo-aleatorios en $I = [0, 1]$, lo que se obtiene es el método Monte-Carlo. Ahora bien, si los x_k se toman como elementos de una sucesión de baja discrepancia, se obtiene el llamado método Cuasi Monte-Carlo para integración numérica.

En términos sencillos, la discrepancia es una medida cuantitativa de la desviación de la distribución uniforme. Debido a que este método, al igual que el de Monte-Carlo, es muy útil para integración en dimensiones altas, se abordará el problema de integrar sobre el hipercubo unitario de dimensión n , es decir, sobre $\bar{I}^n = [0, 1]^n$. Se darán algunas definiciones antes de proporcionar la definición de discrepancia.

Sea $C = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq I^n$. Para cualquier subconjunto B de \bar{I}^n , definimos

$$A(B; C) = \sum_{i=1}^m \chi_B(x_i),$$

donde χ_B es la función indicadora de B , por lo que $A(B; C)$ es el número de puntos de C que están en B , es decir, $A(B; C)$ es una función de conteo.

Sea $\lambda_n(C)$ la medida de Lebesgue n dimensional del conjunto C . Podemos dar una noción de discrepancia del conjunto C , en la forma siguiente.

Si Ψ es una familia de subconjuntos Lebesgue medibles de \bar{I}^n , entonces

$$D_m(\Psi; C) = \sup_{B \in \Psi} \left| \frac{A(B; C)}{m} - \lambda_n(B) \right|.$$

Observe que siempre se tiene $0 \leq D_m(\Psi; C) \leq 1$. Existen dos discrepancias particularmente importantes, que se generan a partir de familias especiales de conjuntos, Ψ . Son útiles en la obtención de cotas de errores del método Cuasi Monte-Carlo. Sea $I^n = [0, 1]^n$.

La *discrepancia estrella*, $D_m^*(C)$, del conjunto de puntos C , se define como

$$D_m^*(C) = D_m(\mathcal{J}^*; C),$$

donde \mathcal{J}^* es la familia de todos los subintervalos de I^n de la forma $\prod_{k=1}^n [0, u_k]$.

La *discrepancia (extrema)*, $D_m(C)$, del conjunto de puntos C , se define como

$$D_m(C) = D_m(\mathcal{J}, C),$$

donde \mathcal{J} es la familia de todos los subintervalos de I^n de la forma $\prod_{k=1}^n [u_k, v_k]$.

Para profundizar más sobre otro tipo de discrepancias y su uso para intervalos no normalizados, véase [18].

De manera informal, se dice que un conjunto $C \subset \bar{I}^n$, con m elementos, es un conjunto con baja discrepancia, si $D_m^*(C)$ o bien $D_m(C)$ es pequeña.

Entre las sucesiones de baja discrepancia más conocidas y estudiadas son las sucesiones de van der Corput [24], Halton [7], Faure [3] y Sobol' [23].

Aunque el método Cuasi Monte Carlo no es tan adecuado para el caso unidimensional, se analizará la construcción de la sucesión de van der Corput unidimensional, ya que es la base para la extensión al caso de dimensiones superiores.

Sea $b \in \mathcal{N}, b \geq 2$.

Si la sucesión de van der Corput de base b es x_0, x_1, x_2, \dots , un algoritmo para obtener el elemento $VC(p, b) := x_p$, es el siguiente.

1. Si $p = 0$, entonces $VC(0, b) = 0$, terminar.
2. Escribir el número p en base b . Es decir, obtener $b = (d_k d_{k-1} \dots d_1 d_0)_b$, con $d_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}, i = 0, 1, \dots, k$, para alguna k .
3. Reflejar el desarrollo anterior con respecto al punto "decimal", esto es, hacer

$$VC(p, b) = \sum_{i=0}^k d_i b^{-i-1}.$$

Obsérvese que $VC(p, b) = (0.d_0 d_1 \dots d_k)_b \in [0, 1)$, para todo $p \geq 0$.

En la tabla siguiente se muestra un resumen de información estadística de una muestra de 5000 puntos obtenidos con la sucesión de van der Corput, primero con base 2 y luego con base 5, junto con dos muestras de números pseudoaleatorios.

La tabla sugiere que los números cuasi aleatorios replican de forma satisfactoria propiedades estadísticas de números uniformes.

Un algoritmo para aproximar la integral $\int_0^1 f(x) dx$ con el método Monte Carlo y la sucesión de van der Corput de base b es el siguiente.

1. Obtener la base $b (\geq 2)$ y un $N \in \mathcal{N}$.
2. Inicializar $S = 0$.
3. Para $i = 0, 1, \dots, N$ hacer

$$S = S + f(VC(i, b)).$$

	Pseudoaleatorios				
	Unif[0,1]	Corp(2)	Corp(5)	Muestra 1	Muestra 2
Media	0.5	0.49967	0.49974	0.49739	0.50515
Mediana	0.5	0.49988	0.49971	0.49168	0.51012
Desv. est.	0.28868	0.28869	0.28870	0.29069	0.28828
Varianza	0.08333	0.08334	0.08335	0.08450	0.08311
Curtosis	-1.2	-1.20018	-1.20001	-1.22709	-1.20353
Coef. asimet.	0	0.00023	0.00000	0.01051	-0.02015
Rango	1	0.99963	0.99962	0.99986	0.99982
Mínimo	0	0.00012	0.00006	0.00011	0.00016
Máximo	1	0.99976	0.99968	0.99996	0.99999

Tabla B.4. Información estadística de dos sucesiones de van der Corput.

N	Base 2		Base 5	
	Aprox.	Error	Aprox.	Error
100	0.236463297	0.013536703	0.239620887	0.010379113
1000	0.24851716	0.00148284	0.248472327	0.001527673
10000	0.249805073	0.000194927	0.249847035	0.000152965
100000	0.249976497	0.000023503	0.249980861	0.000019139
1000000	0.249997638	0.000002361	0.249997894	0.000002106

Tabla B.5. Integración con las sucesiones de van der Corput.

4. Escribir $S/(N + 1)$, como una aproximación a la integral.

Ejemplo

Aproxime el valor de la integral, $\int_0^1 x^3$, utilice el método Cuasi Monte Carlo y la sucesión de baja discrepancia de van der Corput. El valor exacto es 0.25.

Con base en el algoritmo anterior y usando las bases 2 y 5, se construyó la tabla siguiente.

Para este ejemplo se puede observar que el error decrece proporcionalmente con N , en comparación con \sqrt{N} del método Monte Carlo, pero aún muy pobre si se compara con la regla de Simpson.

En el caso multidimensional se pueden utilizar las sucesiones de Halton, en las que para cada dimensión se utiliza una base diferente y se sugiere que cada una de las bases sea un número primo. Una forma sencilla de integrar sobre el hipercubo \bar{I}^n es hacer una lista con los

N	Suc. de Halton	
N	Aprox.	Error
100	0.124710	0.005498333
1000	0.129231	0.000977333
10000	0.130064	0.000144333
100000	0.130192	0.000016333
1000000	0.130206	0.000002333

Tabla B.6. Integración por sucesiones de Halton.

primeros n números primos, p_1, p_2, \dots, p_n y utilizar el algoritmo siguiente para obtener una aproximación a la integral

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

1. Obtener la dimensión n y un $N \in \mathcal{N}$.
2. Inicializar $S = 0$.
3. Para $i = 0, 1, \dots, N$ hacer

$$S = S + g(VC(i, p_1), VC(i, p_2), \dots, VC(i, p_n)),$$

donde $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n$ es el n -ésimo número primo.

4. Escribir $S/(N + 1)$, como una aproximación a la integral.

Existen otras sucesiones que se utilizan en el caso multidimensional como las sucesiones de Faure, de Sobol', de Niederreiter, que no se abordarán en estas notas, pero se da la bibliografía para el lector interesado.

Ejemplo

Aproxime la integral

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 2^{-7} \left(\sum_{k=1}^8 x_k \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_8.$$

(Es la integral que aparece en el último ejemplo del apéndice B, su valor verdadero, véase [20], es $\frac{25}{192}$).

Con el algoritmo que se dio para generar las sucesiones de Halton, se generó la tabla siguiente.

Una desventaja del uso de las sucesiones de baja discrepancia es que dependen del problema que se esté tratando de resolver. Para ver cotas para el mejor y peor de los casos consúltese [18]. A continuación se presenta una tabla comparativa entre el método Monte-Carlo y el método Cuasi Monte-Carlo.

		Cuasi Monte-Carlo		
		Monte Carlo	Mejor	Peor
d	N	$\frac{1}{\sqrt{N}}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{\ln(N)^d}{N}$
1	1000	0.031623	0.001000	0.003000
1	10000	0.010000	0.000100	0.000400
2	100000	0.003162	0.000010	0.000250
5	10000	0.010000	0.000100	0.102400
10	100000	0.003162	0.000010	97.656250
50	100000	0.003162	0.000010	8.88178E+29

Tabla B.7. Tabla comparativa. Aquí d es la dimensión en donde se está integrando y N es el número de puntos en I^d .

Como se puede ver en la tabla, en caso de que no se haga una buena elección de la sucesión de baja discrepancia, se pueden tener resultados carentes de precisión.

Algunas aplicaciones del método Cuasi Monte Carlo a finanzas se pueden ver en [6] y [10].

Bibliografía

- [1] Black, F. y Scholes, M. (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*.
- [2] Dufresne, D. (2000), “Laguerre Series for Asian and Other Options”, *Mathematical Finance*, 10, 407-428.
- [3] Faure, H. (1986), On the star discrepancy of generalized Hammersley sequences en two dimensions. *Monatshefte fur Mathematik* vol. 101, 291–300.
- [4] Geman, H. y Yor. M. (1993), “Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities”, *Mathematical Finance*, 3, 349-375.
- [5] Gentle, J.E. *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Springer Verlag. 1998.
- [6] Glasserman P. *Monte-Carlo Methods in Financial Engineering*. Computational Finance. Springer Verlag. 2004.
- [7] Halton, J.H. (1960), On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensionality integrals. *Numerische Mathematik.*, 2(1960), 84–90.
- [8] Hull J. *Options, Futures and other Derivatives*. Prentice Hall. Cuarta edición. 2000.
- [9] Ingersoll, J.E. Jr. Option Pricing Theory, Finance: The new Palgrave, (Eatwell, J., Milgate, M. y Newman P. eds.) W.W. Norton, 1989.
- [10] Jackel, P. *Monte Carlo Methods in Finance*. John Wiley & Sons. 2002.
- [11] Kemna, A.G.Z. y Vorst, A.C.F. (1990), “A pricing method for options based on average asset values”. *J. Banking Finance* 14.
- [12] Kloeden P. y Platten E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag. 1995.
- [13] Knuth. *The Art of Computer Programming*. Vol. 2. Addison-Wesley. 1969.
- [14] Lamberton, D. y Lapeyre, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall. 1996.
- [15] Lapeyre, B. y Temam, E. (2001), “Competitive Monte Carlo methods for the Pricing of Asian Options”. *Journal of Computational Finance*, 5-1.
- [16] Law M. A. M. y Kelton W. D., *Simulation Modeling and Analysis*. Mc. Graw-Hill. 1991.
- [17] Linetsky, V. (2003), “Spectral Expansions for Asian (Average Price) Options”. *Operations Research*.
- [18] Niederreiter, H. *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM. 1992.
- [19] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. y Flannery, B.P. (1992), *Numerical Recipes in C*. Segunda edición. Cambridge University Press.
- [20] Rabinowitz, P. y Davis, *Methods of Numerical Integration*. Segunda edición. Academic Press. 1984.
- [21] Ross S. *Simulation*. Prentice Hall. Segunda edición. 1997.

- [22] Shreve S. *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer Finance. 2000.
- [23] Sobol', I. (1967), La distribución de puntos en un cubo y la evaluación aproximada de integrales. *Matemáticas computacionales y física matemática*.(En ruso) vol. 7, 784–802.
- [24] van der Corput, J.G. (1935) *Verteilungsfunktionen* I, II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc Ser. B, 38, 813–821, 1058–1066.
- [25] Wilmot, P; Howison, S. y Dewynne, J., *Options Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press. 1993.